

当代经济学系列丛书

Contemporary Economics Series

主编 陈昕

微观经济 理论模型

当代经济学
教学参考书系

【加】 Martin J. Osborne 马丁·J. 奥斯本

【以】 Ariel Rubinstein 阿里尔·鲁宾斯坦 著

林相森 赵雪倩 译



格致出版社
上海三联书店
上海人民出版社

自序

1981年,我加入耶路撒冷希伯来大学的经济学系,开始讲授“价格理论”这门课程。在此期间,我与同事展开了激烈的争论,希望把博弈论引入这门课程,当时很多人都不太赞成。1986年之后,除了个别年份以外,我不再讲授本科生的微观经济学课程。但快从我所供职的这以色列大学退休时,我突然有股冲动,想继续讲这门课。2012年到2017年的五年间,我在特拉维夫大学讲授中级微观经济学。这次,我尝试在课程中少讲一些博弈论,而更关注市场均衡的概念。这样一个转变轨迹,是我学术生命中的一部分。在转变之前和之后的两个阶段,我始终坚持一个原则:不把经济学模型当成多么神圣的东西。在我看来,经济学模型也没有对错之分,只是一些模型比较有趣,而另一些则不那么有趣而已。我喜欢讲授包含各种各样模型的课程,而不是只偏爱某一种特定方法。我一点也不关注在学术界流行的那些理论。

本书以我在特拉维夫大学的课程讲义(希伯来语)为基础。非常感谢那门课程的助教们的帮助。

2016年,我开始与马丁·奥斯本合作,他既是我的老朋友,也是本书的合著者。我们一起修改了我潦草的讲义初稿,改变了写作风格,提高了表达的准确性。

我相信当前的版本并不是这本书的最终版本。虽然我们取得了一些进步,但我认为某些章节(主要是第4、5、6、7、11、12、15、16章)还不够新颖。因此,我希望能在未来几年对本书进行大幅修订。

阿里尔·鲁宾斯坦
特拉维夫大学以及纽约大学
<http://arielrubinstein.tau.ac.il>

前言

本书包括为期一年的“中级微观经济学”本科课程的内容,包括当代微观经济学理论中的基本概念和模型。我们的主要目的是让读者理解微观经济学理论中的模型和均衡的概念。

微观经济学模型与真实世界之间的联系非常微妙,微观经济学理论研究者对其工作的目的各执己见。阿里尔经常就经济理论中模型的意义表达他的观点,特别是在他的著作《经济学寓言》(*Economic Fables*, Rubinstein, 2012)中。虽然我们不在本书中讨论经济理论对政策的影响及借鉴意义,我们仍认为:经济学模型应该与现实世界相联系;在分析经济互动时,经济学模型应关注我们在现实中讨论的那些概念。

在本书中,我们遵循的主要原则是:准确表述各种概念、模型和结论。然而,我们使用的数学都比较简单,几乎没用到微积分知识。在正文和课后习题中,我们也尽量避免涉及计算。但是很多证明中会涉及复杂的逻辑论证。

内容

第一部分(第1—7章)介绍了关于经济主体的一些基本模型。首先,我们讨论了偏好(第1章)、选择(第2章)和不确定情况下的选择(第3章),然后讨论了消费者行为(第4章和第5章)、生产者行为(第6章)和垄断(第7章)。有关生产者的章节中,我们假设生产者不一定会追求利润最大化,这与传统的模型有所不同。

本书的核心是第二部分(第8—14章),这个部分介绍了经济模型中的均衡概念。第8章和第9章利用弱肉强食经济(第8章)以及商品不可分割的经济(第9章)讨论了均衡的含义,这两章是不常见的内容。随后几章的内容较为常见,包括交换经济的模型(第10章和第11章)、引入生产的模型(第12章)、理性预期(第13章)和信息不对称(第14章)。

第三部分(第 15 章和第 16 章)简单介绍了博弈论以及博弈论在经济学中的应用。我们只讨论了纳什均衡和子博弈精炼均衡的概念,把均衡当成稳态对待,而不讨论解概念的认知性解释。第四部分(第 17—20 章)向读者简单介绍了机制设计(第 17 章)、匹配(第 18 章)、对经济制度的公理性分析(第 19 章)和社会选择(第 20 章)。

第一部分 个人行为	
1. 偏好	4. 消费者偏好
2. 选择	5. 消费者行为
3. 不确定性	6. 生产者行为
	7. 垄断
第二部分 均衡	
8. 弱肉强食经济	11. 扩展的交换经济
9. 市场	12. 消费者和生产者
10. 交换经济	13. 价格与预期
	14. 信息不对称
第三部分 博弈论	
15. 策略博弈	16. 扩展式博弈
第四部分 其他主题	
17. 机制设计	19. 理想社会经济制度
18. 匹配	20. 社会选择

有几章(比如第 8、9、13、14 章和第 17—20 章)可以作为微观经济学高年级本科课程或研究生课程的基础。

我们打算不定期修订本书。相关修订信息详见我们的个人网站。

课后习题

本书包括约 150 道课后习题。我们为教师提供了课后习题的解答手册,如有需要,可登录我们两人中任何一人的网站,在与本书相关的页面上申请下载。

人称代词

在合作的三十年中,我们经常争论在学术材料中应使用哪个性别的人称代词(即用“他”还是“她”)。我们在所著的《博弈论教程》(*A Course in Game Theory*, 1994)一书中提出了在这个问题上的观点,我们的观点至今未变。马丁更喜欢用女性的人称代词,而阿里尔则坚持使用男性的人称代词。此处我们不再详细重复我们的立场。用一句话总结就是,阿里尔主张:“我坚信需要消除性别不公,但要解决性别不公问题,关键在其他方面,仅有语言姿态(language gestures)是远远不够

的。”马丁在他所著的《博弈入门》(*An Introduction to Game Theory*, 2004: xv—xvi)一书中详述了其立场,并引用相关证据表明,使用以男性为中心的语言会增强性别歧视的偏见和思维方式;马丁还认为,虽然使用女性的人称代词显然也不是性别中立的,但这样做有助于解决现存的偏见问题。

我们在1994年所著的书(即《博弈论教程》)中使用了女性的人称代词“她”,这个折中方案我们俩都不太喜欢。我们在本书的写作过程中采用了新的解决方案:本书英文版有两个版本,一个版本使用女性的人称代词,另一个版本使用男性的人称代词。请读者自行选择。*

致谢

非常感谢 Minghao Zou 读完整本书,并指出了书中许多错误和易造成歧义的地方。

非常感谢开放图书出版社(Open Book Publishers)所有工作人员的高效工作。跟他们的合作非常令人愉快。

马丁·J.奥斯本
多伦多大学

<https://economics.utoronto.ca/osborne>

阿里尔·鲁宾斯坦
特拉维夫大学以及纽约大学
<http://arielrubinstein.tau.ac.il>

* 本书中文版遵循中文世界语言习惯,统一用“他”来泛指性别不明或没有区分必要的某个人,不再在人称代词上进行版本区分。——编者注

目 录

第一部分 个人行为

003	1 偏好和效用
003	1.1 偏好
006	1.2 偏好的形成
007	1.3 一个实验
008	1.4 效用函数
012	课后习题
014	2 选择
014	2.1 选择和理性化的选择
015	2.2 理性化的选择
017	2.3 性质 α
018	2.4 满意即可
019	2.5 抽钱泵
019	2.6 非理性化选择行为的证据
022	课后习题
025	3 不确定性下的偏好
025	3.1 彩票
025	3.2 对彩票的偏好

029	3.3 期望效用
030	3.4 理论和实验
032	3.5 风险厌恶
033	课后习题
035	4 消费者偏好
035	4.1 商品组合
036	4.2 对商品组合的偏好
038	4.3 单调性
038	4.4 连续性
039	4.5 凸性
041	4.6 可微性
043	课后习题
045	5 消费者行为
045	5.1 预算集
046	5.2 需求函数
047	5.3 理性的消费者
048	5.4 可微偏好
050	5.5 需求函数的理性化
053	5.6 需求函数的性质
055	课后习题
058	6 生产者行为
058	6.1 生产者
060	6.2 产出最大化
061	6.3 利润最大化
063	6.4 成本函数
065	6.5 生产者偏好
066	课后习题
068	7 垄断
068	7.1 基本模型
068	7.2 统一定价的垄断市场
072	7.3 歧视性垄断

073	7.4 隐性歧视
076	课后习题

第二部分 均衡

081	8 弱肉强食经济
081	8.1 模型
083	8.2 均衡
085	8.3 帕累托稳定性
087	8.4 弱肉强食经济中的均衡和帕累托稳定性
087	8.5 能控制个人能力对比关系的社会规划者实现的配置
089	8.6 外部性
091	课后习题
093	9 市场
093	9.1 模型
097	9.2 市场均衡的存在和构建
100	9.3 均衡和帕累托稳定性
102	9.4 市场均衡的唯一性
102	课后习题
104	10 交换经济模型
104	10.1 模型
106	10.2 竞争性均衡
109	10.3 竞争性均衡的存在性
111	10.4 重启交易
111	10.5 均衡和帕累托稳定性
112	10.6 核心
113	10.7 基于需求函数的竞争性均衡
114	10.8 可操纵性
115	10.9 埃奇沃思盒状图
116	课后习题

120	11 扩展的交换经济模型
120	11.1 包括不可分割商品和货币的市场
126	11.2 有不确定性的交换经济
131	课后习题
135	12 包括消费者和生产者的市场
135	12.1 生产经济
139	12.2 既有资本又有劳动的经济
142	课后习题
144	13 价格与预期均衡
144	13.1 银行网点之间的顾客分布
148	13.2 信息不对称和逆向选择
151	13.3 渔业经济
154	课后习题
157	14 信息不对称的市场
157	14.1 基础模型
158	14.2 加入教育因素的劳动力市场
164	课后习题

第三部分 博弈论

169	15 策略博弈
169	15.1 策略博弈和纳什均衡
170	15.2 几个简单的例子
174	15.3 经济学例子
179	15.4 纳什均衡的存在性
182	15.5 严格竞争博弈
183	15.6 康德均衡
184	15.7 混合策略
189	15.8 理解纳什均衡

189	课后习题
195	16 扩展式博弈
196	16.1 扩展式博弈和子博弈精炼均衡
201	16.2 策略是什么?
202	16.3 逆向归纳法
206	16.4 讨价还价模型
215	课后习题

第四部分 其他主题

221	17 机制设计
221	17.1 公共项目的决策
222	17.2 策略防范机制
223	17.3 维克里-克拉克-格罗夫斯机制
226	课后习题
228	18 匹配
228	18.1 匹配问题
229	18.2 盖尔-沙普利算法
233	18.3 盖尔-沙普利算法和稳定性
235	课后习题
237	19 理想社会经济制度
237	19.1 模型
239	19.2 经济制度的性质
241	19.3 理想社会的特点
243	课后习题
245	20 汇总偏好
245	20.1 社会偏好
246	20.2 偏好汇总函数
247	20.3 偏好汇总函数的性质

250	20.4 阿罗不可能定理
253	20.5 吉伯德-萨特思维特定理
256	课后习题
258	参考文献
265	译后记

第一部分 个人行为



偏好和效用

1.1 偏好

在本书的第一部分,我们讨论单个经济主体(消费者或生产者)的各种模型。这些模型本身非常有趣,但我们学习这个部分主要是为研究经济主体之间的相互作用做准备,本书后面的章节都是关于经济主体之间的相互作用。

我们想要研究经济生活中个人在面对一系列选项(选项集)时会从中选取哪些。设想一下,我们要建立一个模型,在这个模型中个人的特征可能包括很多方面,比如社会地位、种族、经验,甚至是大脑结构。然而,本书中我们采用的方法与大多数经济理论相同,以个人对选项的偏好来定义其特征,而不考虑偏好是如何形成的。

在研究个人如何做出选择之前,我们将先在本章讨论个人对选项集的偏好模型。我们认为,个人的偏好是对其态度的描述,而与实际做出的选择没有必然联系。即使并不打算参观当地的博物馆,你也可能会对博物馆内的展品有自己的偏好;即使不能穿越时空,你也可以设想如果生活在3 000年前你会做什么;即使不能影响他人的行为和自然界的规律(如天气等),你也可以对其有自己的偏好。

我们表达偏好时可能会这样描述:“与 b 相比,我更喜欢 a ”;“与 b 相比,我喜欢 a 得多”;“与 b 相比,我还是更喜欢 a 一点”;以及“我喜欢 a ,讨厌 b ”。本书跟大多数经济理论一样,对于偏好的模型仅采用第一种描述方式。也就是说,偏好模型仅包含个人对各种选项的偏好排序方面的信息,而不包含偏好程度的差别方面的信息。

现在,我们建议您花几分钟的时间,登录下述网页完成问卷:<https://arielrubinstein.org/gt/exp11/>。

我们可以将个人对于选项集的不同偏好设定为一个问卷中的选项。对选项集中的每一对选择 (x, y) ,问卷要求个人回答以下三个描述中哪一个更符合自己对这对选项的态度。

1. 相对于 y ,我更喜欢 x 。
2. 相对于 x ,我更喜欢 y 。

3. 我认为 x 和 y 一样好。

个人对各种选项的态度,决定了他会如何填写这份问卷。我们假设个人并未明确考虑过这份问卷的用意。他的偏好会告诉我们:如果必须回答这份问卷,他会选中哪个选项。

我们对于问卷中表示不同偏好关系的各个选项要进行编码处理。其中一种方法是:当个人在选择“相对于 y ,我更喜欢 x ”“相对于 x ,我更喜欢 y ”和“我认为 x 和 y 一样好”的时候,分别将符号“1”“-1”和“0”赋给 (x, y) 。但我们在本章中不采用这种方法,而是采用经济学的传统做法,用双边关系表示问卷中的选项或偏好关系。

集合 X 上的一个双边关系(binary relation)* 告诉我们,对于集合 X 中每一对有序排列的元素 (x, y) , x 与 y 之间是否有某种关系。例如,“是否熟悉”就是一个人群集合上的双边关系。“ x 与 y 相熟”,对某些 (x, y) 而言为真,对某些 (x, y) 而言则为假。双边关系的另一例子是定义在数字集上的“小于”关系。对于某些 (x, y) 而言, x 小于 y 是成立的;而对于某些 (x, y) 而言, x 小于 y 不成立。对于双边关系 R , xRy 的意思是 x 和 y 按照双边关系 R 相关。对集合 X 中的任意一对 (x, y) 而言, xRy 要么成立,要么不成立。例如,在数字集中的二元关系“ $<$ ”的例子中, $3 < 5$ 成立,而 $7 < 1$ 则不成立。

现在我们回头去看问卷。如果某个人在回答问卷时选择“相对于 y ,我更喜欢 x ”或“我认为 x 和 y 一样好”,那么我们可以说 x 至少和 y 一样好,表示为 $x \geq y$ 。这样我们就可以用双边关系来表示问卷中关于 x 和 y 的三种可能的关系,如图 1.1 所示。“相对于 y ,我更喜欢 x ”可以表示为 $x \geq y$ 成立而 $y \geq x$ 不成立;“相对于 x ,我更喜欢 y ”可以表示为 $y \geq x$ 成立而 $x \geq y$ 不成立;“我认为 x 和 y 一样好”可以表示为 $x \geq y$ 且 $y \geq x$ 。

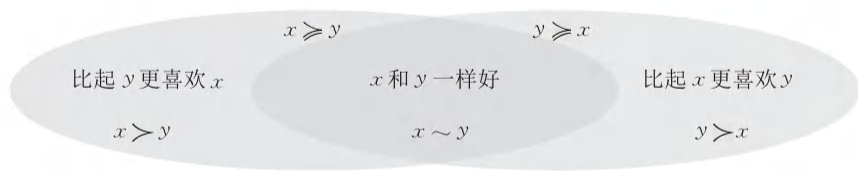


图 1.1 个人对 x 和 y 的偏好

* 在中文世界,“binary relation”多被直译为“二元关系”。本书没有采用这种译法,而是将其翻译为“双边关系”,这是基于以下两个原因:第一,“二元关系”这一表述在中文中的含义是模糊的,并未成为一种常识。第二,“二元关系”虽然可以表达“在两个选项之间的比较”这一层意思,但它无法表达“关系”的方向性。“关系”(也就是 xRy 中的 R)实际上是一种逻辑运算,运算结果可以是“是”或“否”,并且这种运算是具有方向的(与除法运算类似)。比如当 R 表示“不劣于”的关系 $\geq$ 时,即便当我们知道 $x \geq y$ 的结果为“是”或者“否”,我们也无法判定 $y \geq x$ 的结果是什么,换言之, x 和 y 出现的顺序(关系的“方向”)具有实质影响。我们认为,“二元变量”这一表述只能表达“两两”比较的意思,但无法表达两个选项之间可以进行“双向”比较;而“双边关系”则能将两层含义都表达出来。——译者注

我们可以由双边关系 $\geq$ 推导出另外两种双边关系 $\sim$ 和 $>$,定义如下:

如果 $x \geq y$ 且 $y \geq x$,则有 $x \sim y$ 。

如果 $x \geq y$ 成立但 $y \geq x$ 不成立,则有 $x > y$ 。

双边关系 $\sim$ 表示“无差异”(indifference), $>$ 则表示“严格偏好”(strict preference)。这种表示方法与问卷选项中用文字表达的双边关系是一致的:如果 $x \sim y$,则有 $x \geq y$ 且 $y \geq x$,那对应的问卷中的选项是“我认为 x 和 y 一样好”;如果 $x > y$,那对应的问卷中的选项是“相对于 y ,我更喜欢 x ”。

假设填写问卷的人回答了问卷中所有的问题。我们用双边关系 $\geq$ 来表示问卷中的答案或选项,那么这个假设意味着对所有不同的选项 x 和 y 而言,要么 $x \geq y$ 成立,要么 $y \geq x$ 成立。此外,我们假设如果 x 和 y 是同一个选项,上述结论同样成立。也就是说,对于每个选项 x ,我们假设 $x \geq x$ 成立,这个性质被称为反身性(reflexivity)。问卷中没有“你如何比较 x 和 x ”这个问题,所以我们无法从他的答案中推断出个人偏好的反身性。我们之所以如此假设,是因为这与我们对双边关系的解释相符:个人认为每一个选项都至少和它自身一样好。

无论选项 x 和选项 y 是否相同,对于所有 x 和 y ,要么 $x \geq y$ 成立,要么 $y \geq x$ 成立,这个性质被称为完备性(completeness)。

定义 1.1:完备的双边关系

如果对集合 X 中所有的选项 x 和 y 而言,不是 xRy 成立就是 yRx 成立(或二者都成立),那么集合 X 的双边关系 R 是完备的。特别地,任何完备的双边关系都具有反身性:对于每个 $x \in X$ 都有 xRx 成立。

为使双边关系 $\geq$ 与偏好关系相一致,我们要求它不仅是完备的,而且要求如果 $x \geq y$ 且 $y \geq z$,则 $x \geq z$ 。这个性质被称为传递性(transitivity)。

定义 1.2:可传递的双边关系

对于集合 X 中的任意选项 x 、 y 、 z ,如果从 xRy 且 yRz ,可得 xRz ,那么我们称集合 X 上的双边关系 R 具有传递性。

为使偏好关系具有传递性,我们限制了问卷中的答案或选项。如果个人对关于 x 和 y 问题的回答是“相对于 y ,我更喜欢 x ”或“我认为 x 和 y 一样好”,并且它对关于 y 和 z 的问题的回答是“相对于 z ,我更喜欢 y ”或“我认为 z 和 y 一样好”,那么,他对关于 x 和 z 的问题的回答必须是“相对于 z ,我更喜欢 x ”或“我认为 x 和 z 一样好”。

总之,我们利用完备且可传递的双边关系来对个人偏好建模。

定义 1.3:偏好关系

定义在集合 X 上的偏好关系是一个定义在集合 X 上的完备且可传递的双边关系。

请注意,从偏好关系 $\geq$ 中推导出的双边关系 $\sim$ (无差异)和 $>$ (严格偏好)也是可传递的。我们在这里简单证明 $\sim$ 是可传递的:如果 $x \sim y$ 且 $y \sim z$,则 $x \geq y$, $y \geq x$, $y \geq z$,且 $z \geq y$,那么由 $\geq$ 的可传递性,我们可得 $x \geq z$ 且 $z \geq x$,因此 $x \sim z$ 。课

后习题第1题(1)要求你证明 $\succ$ 的传递性。请注意,如果 $x \succcurlyeq y$ 且 $y \succ z$ (或者 $x \succ y$ 且 $y \succcurlyeq z$),那么 $x \succ z$ [课后习题第1题(2)]。

我们有时也用到以下几个其他的双边关系的性质。

定义 1.4: 对称的和非对称的双边关系

对于集合 X 里的任意一对元素 x 和 y , 如果 xRy , 就一定有 yRx , 那么我们称集合 X 上的双边关系 R 是对称的; 如果对于 X 中任意两个不相等的元素 x 和 y ($x \neq y$), 只要 xRy 成立, 就一定有 yRx 不成立, 则称双边关系 R 是非对称的。

对称的双边关系的一个例子是用“是邻居”表示二人是否有邻里关系(注意: 通常情况下这个关系是不可传递的), 非对称的双边关系的一个例子是“年龄大于”。

由偏好关系 $\succcurlyeq$ 推导得出的双边关系 $\sim$ 具有反身性和对称性, 且正如我们之前证明的那样, 它也具有传递性。具有所有这些性质的双边关系称为等价关系。

定义 1.5: 等价关系

如果双边关系具有反身性、对称性、传递性, 则这个双边关系是等价关系。

课后习题第4题与等价关系的性质有关。尤其是, 这道题要求你证明, 任何集合 X 上的等价关系 R 可以将集合 X 分成若干互不相交的子集, 当且仅当 xRy 时, x 和 y 这两个选项属于同一个子集。每一个这样的子集都被称为等价类(equivalence class)。对于无差异关系 $\sim$ 来说, 等价类又被称为无差异集合; 处于同一个无差异集合中的所有选项对于个人来说是一样好的, 而处于不同无差异集合中的选项是不一样的。

1.2 偏好的形成

当我们建立模型研究个人行为时, 假设他们都有偏好, 且默认这些偏好关系是给定的, 不去探究这些偏好关系是如何从更底层的因素作用下形成的。现在, 我们简要讨论以下几个这样的因素。

价值函数 每个人心中有一个函数 v , 它给每个选项赋予一个值, 可以理解成这个选项对他来说的主观“价值”。这个值越大, 表明他越喜欢这个选项。正式地, 个人的偏好关系 $\succcurlyeq$ 定义为: $x \succcurlyeq y$ 当且仅当 $v(x) \geq v(y)$ 。由这种方式得出的双边关系 $\succcurlyeq$ 是一个标准的偏好关系: 它是完备的, 因为我们能够比较任意两个数字(对任意两个数字 a 和 b 而言, 不是 $a \geq b$ 就是 $b \geq a$, 或二者都成立); 它是可传递的, 因为双边关系 $\succcurlyeq$ 是可传递的[如果 $x \succcurlyeq y$ 且 $y \succcurlyeq z$, 则 $v(x) \geq v(y)$ 且 $v(y) \geq v(z)$, 可得 $v(x) \geq v(z)$, 因此 $x \succcurlyeq z$]。

距离函数 对于某个人而言, 存在一个最好的选项, 称为理想的选项, 他对其其他选项的偏好程度取决于这个选项与理想选项之间的距离, 而这个距离由函数 d 给出。也就是说, 当且仅当 $d(x) \leq d(y)$ 时, 个人的偏好关系 $\succcurlyeq$ 才可以用 $x \succcurlyeq y$ 表示。距离函数可以看作价值函数的一个例子, 即 $v(x) = -d(x)$ 。

词典式偏好 个人心中有两个完备的且可传递的双边关系, $\succcurlyeq_1$ 和 $\succcurlyeq_2$, 每个

双边关系都与选项的某一个特征有关。例如,如果 X 是电脑的集合,那这两个特征可能是电脑的储存空间和屏幕分辨率。他优先考虑第一个特征,当两个选项的第一个特征相同时,再考虑第二个特征。正式点的说法是:如果(1) $x \succ_1 y$ 或(2) $x \sim_1 y$ 且 $x \succcurlyeq_2 y$,则个人的偏好关系 $\succcurlyeq$ 可以用 $x \succcurlyeq y$ 表示。

这样定义的双边关系 $\succcurlyeq$ 也是偏好关系。由 $\succcurlyeq_1$ 和 $\succcurlyeq_2$ 的完备性可知,它具有完备性。下面证明它也具有传递性。设 $x \succcurlyeq y$ 且 $y \succcurlyeq z$ 。存在两种情况。(1)比较 x 和 y 时,第一个特征起决定性作用,即: $x \succ_1 y$ 。给定 $y \succcurlyeq z$,可得 $y \succcurlyeq_1 z$,所以由 $\succcurlyeq_1$ 的传递性可得, $x \succ_1 z$ [详见课后习题第 1 题(2)],因此 $x \succcurlyeq z$ 。(2)比较 x 和 y 时,第一个特征不起决定性作用,即 $x \sim_1 y$ 且 $x \succcurlyeq_2 y$ 。如果比较 y 和 z 时,第一个特征起决定性作用,即 $y \succ_1 z$,那么由 $\succ_1$ 的传递性可得 $x \succ_1 z$,因此 $x \succcurlyeq z$;如果比较 y 和 z 时,第一个特征不起决定性作用,那么 $y \sim_1 z$ 且 $y \succcurlyeq_2 z$ 。由 $\sim_1$ 的传递性可得 $x \sim_1 z$,且由 $\succcurlyeq_2$ 的传递性可得 $x \succcurlyeq z$,因此 $x \succcurlyeq z$ 。

全部一致规则 一个人心中有 n 个方面的考量因素,由完备且可传递的双边关系 $\succcurlyeq_1, \succcurlyeq_2, \dots, \succcurlyeq_n$ 表示。例如,一名家长在做决策的时候可能把他的 n 个孩子的偏好都考虑进去。如果对 $i=1, \dots, n$,存在 $x \succcurlyeq_i y$,那么我们可以用 $x \succcurlyeq y$ 定义这个双边关系 $\succcurlyeq$ 。这个双边关系是可传递的,但未必完备。具体来说,如果两个双边关系 $\succcurlyeq_i$ 存在矛盾($x \succcurlyeq_j y$ 且 $y \succ_k x$),那么 $\succcurlyeq$ 就不是完备的。

大多数规则 某人用三个标准来评价各个选项,每一个标准都由完备、可传递、非对称的双边关系 $\succcurlyeq_i$ 表示。(双边关系的非对称性意味着,在任何一种关系下,都不存在两个彼此无差异的选项。)当且仅当大多数(至少两个)双边关系 $\succcurlyeq_i$ 对 x 的偏好程度都高于 y ,才可用 $x \succcurlyeq y$ 定义双边关系 $\succcurlyeq$ 。 $\succcurlyeq$ 是完备的,因为对所有的选项 x 和 y 而言,要么在至少两个标准下有 $x \succcurlyeq_i y$ 成立,要么在至少两个标准下有 $y \succcurlyeq_i x$ 成立。但正如孔多塞悖论(Condorcet paradox)所示,这样的双边关系 $\succcurlyeq$ 未必是可传递的。设 $X = \{a, b, c\}$, $a \succ_1 b \succ_1 c$, $b \succ_2 c \succ_2 a$, $c \succ_3 a \succ_3 b$ 。由此可得 $a \succ b$ (在大多数双边关系中,他对 a 的偏好程度高于 b), $b \succ c$ (在大多数双边关系中,他对 b 的偏好程度高于 c),但 $c \succ a$ (在少数双边关系中,他对 a 的偏好程度高于 c)。

1.3 一个实验

偏好是可传递的,这个假设看起来是理所当然的。当人们被告知他们的偏好具有不可传递性时,往往会感到尴尬并改变自己对那些选项的评价。然而,设计出一个大多数人都会表现出一定程度的不可传递性的场景并不困难。在 1.1 节,我们要求你回答一份冗长的问卷,这份问卷有 36 个问题,每个问题都要求你比较一对选项(从 9 个选项中选出的一对)。每个选项代表一个度假套餐,而每个度假套餐包含所在城市、酒店星级、食物质量和价格四个方面的内容。

截至 2018 年 4 月,大约 1 300 个填写问卷的人中,只有 15% 的人没有违背可

传递性。我们设三个选项为一组,将这三个选项分别进行两两比较,如果比较后发现可传递性不成立,那么我们判定这组选项违背了偏好的可传递性。所有填写问卷的人违背可传递性的组数的中位数是 6,平均数是 9.5。(顺带提一下,在所有参与问卷的人中,出现非传递性偏好的最大值为 66 组。虽然我们总共有 84 个由三个选项组成的选项组,但理论上可能出现非传递性偏好的最大值是小于 84 组的。)

四分之一的参与者的偏好违背了以下这组选项的可传递性。

1. 在巴黎度过周末,四星级的酒店,食物质量为 17,总价 574 美元。
2. 在巴黎度过周末,总价 574 美元,食物质量为 17,四星级酒店。
3. 在巴黎度过周末,食物质量为 20,三星至四星级酒店,总价 560 美元。

请注意,第 1 个选项和第 2 个选项其实描述的是同一个度假套餐,只是顺序不同。几乎所有填写问卷的人都认为第 1 个选项和第 2 个选项是无差异的,所以这个组选项的不可传递性是由人们表现出的对 1 和 3 两个选项与对 2 和 3 两个选项的偏好的差异造成的。当可传递性成立的时候,人们对 1 和 3 两个选项的偏好关系应该与对 2 和 3 两个选项的偏好关系一样。也就是说,套餐里各个特征的排列顺序对偏好有一定影响。

很多问卷答案或选项之所以具有可传递性,是因为人们遵循了一个简单的原则,如只关注一个条件(如价格)而忽略其他条件,或是首先考虑一个条件(如城市),当第一个条件都相同时再考虑第二个条件(如食物质量),这就类似于词典式偏好。按这类原则进行评价比按复杂标准进行评价更容易符合可传递性。

1.4 效用函数

在很多经济学模型中,不用偏好来描述个人,而是用价值函数来描述他们。这种设定并不意味着每个人会明确地从他们的价值函数推导出偏好,而仅仅意味着他的偏好可以从这样一个价值函数中推导出来。如果偏好关系可以由价值函数推导得出,那么我们称这种偏好关系可以用价值函数来表示。我们将可以表示偏好关系的价值函数称为效用函数。

定义 1.6:效用函数

对于任意一个集合 X 和定义在集合 X 上的偏好关系 $\succsim$,如果当且仅当 $u(x) \geq u(y)$ 时有 $x \succsim y$,那么,函数 $u: X \rightarrow \mathbb{R}$ 可以表示偏好关系 $\succsim$ 。我们可以说 u 是可以表示偏好关系 $\succsim$ 的效用函数。

例 1.1 定义在集合 $\{a, b, c, d\}$ 上的偏好关系 $\succsim$,且 $a \succ b \sim c \succ d$ 。价值函数 u 是表示偏好关系 $\succsim$ 的效用函数,其中 $u(a)=5$, $u(b)=u(c)=-1$, $u(d)=-17$ 。

偏好关系需满足什么条件才能用效用函数表示? 要回答这个问题,我们需要另外一组定义。

定义 1.7:最劣选项和最优选项

对于任意一个集合 X 和定义在集合 X 上的偏好关系,如果对所有 $y \in X$ 都有

$y \succcurlyeq x$, 那么 $x \in X$ 是在集合 X 中根据 $\succcurlyeq$ 选出的最劣选项 (minimal alternatives); 如果对所有 $y \in X$ 都有 $x \succcurlyeq y$, 那么 $x \in X$ 是在集合 X 中根据 $\succcurlyeq$ 选出的最优选项 (maximal alternatives)。

以下引理表明, 定义在有限集合上的所有偏好关系都存在最优选项和最劣选项。

引理 1.1: 最劣选项和最优选项的存在性

设 X 是非空有限集合, $\succcurlyeq$ 是定义在 X 上的偏好关系。至少存在一个选项 $x \in X$ 是在集合 X 中根据 $\succcurlyeq$ 选出的最劣选项; 至少存在一个选项 $x \in X$ 是在集合 X 中根据 $\succcurlyeq$ 选出的最优选项。

证明: 我们接下来证明最劣选项的存在性, 最优选项的存在性的证明与之类似。对 X 中元素的数量 n 使用归纳法。如果 $n=1$, 则 X 中唯一的这个元素 (选项) 就是在集合 X 中根据偏好关系 $\succcurlyeq$ 选出的最劣选项。假设当选项的数量为 $(n-1)$ 时引理 1.1 成立, 我们可以证明在选项的数量为 n 时同样成立。设 y 为集合 X 中的任意一个选项, 设 x 是在集合 $X \setminus \{y\}$ [有 $(n-1)$ 个元素或选项的集合] 中, 根据 $\succcurlyeq$ 选出的最劣选项。如果 $y \succcurlyeq x$, 那么 x 是在集合 X 中根据 $\succcurlyeq$ 选出的最劣选项; 如果 $y \succcurlyeq x$ 不成立, 那么 $x \succ y$ 。取任意 $z \in X \setminus \{y\}$ 。由于 x 是在集合 $X \setminus \{y\}$ 中的最劣选项, 可得 $z \succcurlyeq x$, 所以由传递性可得 $z \succcurlyeq y$ 。因此, y 是 X 中根据 $\succcurlyeq$ 选出的最劣选项。

课后习题第 2 题(2)要求你举一个定义在无限集合上的偏好关系的例子, 并且要求根据这个偏好关系无法选出最优选项和最劣选项。

我们可以证明, 每一个有限集合上的偏好关系都能由效用函数表示。

命题 1.1: 用效用函数表示偏好关系

有限集上的每个偏好关系都可以由效用函数表示。

证明: 设 X 是一个有限集合, $\succcurlyeq$ 是定义在 X 上的偏好关系。令 $Y_0 = X$, M_1 是 Y_0 中根据 $\succcurlyeq$ 选出的最劣选项的集合。由引理 1.1 得, Y_0 是非空集合。如果 Y_{k-1} 非空, 当 $k \geq 1$ 时, 定义 $Y_k = Y_{k-1} \setminus M_k$, 也就是说, 在 Y_{k-1} 中删掉 M_k 后得到 Y_k 。设 M_{k+1} 是 Y_k 中根据 $\succcurlyeq$ 选出的最劣选项的 (非空) 集合。也就是说, 在每一阶段都从剩余的选项集中删掉根据 $\succcurlyeq$ 选出的最劣选项。(图 1.2 详述了这个过程。)

由引理 1.1 得, 如果 Y_k 是非空集合, 则 M_{k+1} 也是非空集合。由于 X 是有限集合, 当 k 取某个值 K 时, Y_k 为空集 (但 Y_{k-1} 为非空集)。因此, 任意 $x \in X$ 都属于某个集合 M_k , $1 \leq k \leq K$ 。

对所有 $x \in M_k$, $k=1, \dots, K$, 定义函数 $u: X \rightarrow \mathbb{R}$ 为 $u(x)=k$ 。也就是说, 我们知道了每个选项在第几个阶段被移出 X 后, 任意一个选项对应的被移出阶段的序号, 就可以被当作该选项的效用函数的值。

我们接下来要证明 u 是表示 $\succcurlyeq$ 的效用函数。也就是说, 我们要证明, 对任意选项 a 和 b , 当且仅当 $u(a) \geq u(b)$ 时, 有 $a \succcurlyeq b$ 。

当且仅当 a 和 b 均为集合 $Y_{u(a)-1}$ 中根据 $\succcurlyeq$ 选出的最劣选项时, 有 $u(a) =$

$u(b)$,从而又有 $b \geq a$ 且 $a \geq b$,于是有 $a \sim b$ 。

当且仅当满足以下条件时,才有 $u(a) > u(b)$ 成立: a 是集合 $Y_{u(a)-1}$ 中根据 $\geq$ 选出的最劣选项,但 b 不是集合 $Y_{u(a)-1}$ 中根据 $\geq$ 选出的最劣选项。而当 a 是集合 $Y_{u(a)-1}$ 中根据 $\geq$ 选出的最劣选项时,有 $b \geq a$, $b \in Y_{u(a)-1}$;当 b 不是集合 $Y_{u(a)-1}$ 中根据 $\geq$ 选出的最劣选项时, $a \geq b$ 不成立,于是, $b > a$ 。因此,当且仅当 $u(a) > u(b)$ 时,有 $b > a$ 。

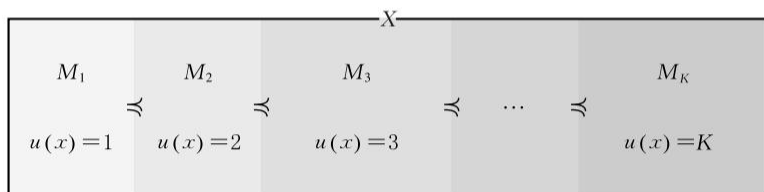


图 1.2 命题 1.1 的证明中的构造过程

例 1.2: 电影院座位

一个电影院共有 2 000 个座位,共计 40 行 50 列。这 40 行从电影屏幕开始向后依次编号为 1—40,这 50 列从左向右依次编号为 1—50。一个人对座位的集合有词典式偏好。首先,他更偏好靠后排的座位,如果在同一行的座位中选择,他更偏好靠左的座位(出口位于左边,靠左的座位更靠近出口,在电影结束之前万一想要离开比较方便)。

在命题 1.1 的证明中,集合 M_1 指第 1 行第 50 列的座位,效用值为 1;集合 M_2 指第 1 行第 49 列的座位,效用值为 2;……集合 $M_{2\,000}$ 指第 40 行第 1 列的座位,效用值为 2 000。(图 1.3 举例说明了一个有 10 行 10 列座位的电影院。)这个人的偏好关系可由效用函数 u 表示, $u(x) = 50r(x) - c(x) + 1$, 其中, $r(x)$ 是座位所在的行数, $c(x)$ 是座位所在的列数。

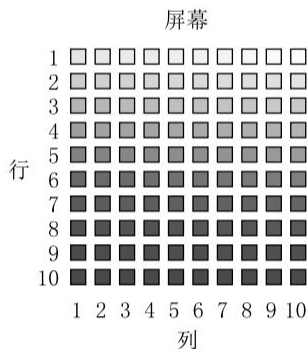


图 1.3 一个与例 1.3 相似的电影院

注:电影院里有 10 行 10 列的座位。对个人来说,没有任何两个座位是完全无差别的。如果 x 的阴影比 y 深,那么相对于 y ,他更喜欢 x 。

定义在无限集合上的很多偏好关系也可以用效用函数表示。举个简单的例子,非负实数集合上的偏好关系 $\geq$ 可由效用函数 $u(x)=x$ 表示,当且仅当 $x \geq y$ 时, $x \geq y$ 。但是,并不是所有定义在无限集合上的偏好关系都能由效用函数表示。比如,定义在单位正方形 $X=\{(x_1, x_2): x_1, x_2 \in [0, 1]\}$ 上的词典式偏好即为一例,也就是说,首先考虑第一个坐标,如果第一个坐标相同再看第二个坐标(例如, $(0.3, 0.1) \succ (0.2, 0.9) \succ (0.2, 0.8)$)。(图 1.4 展示了偏好程度高于某个给定选项的所有选项的集合。)

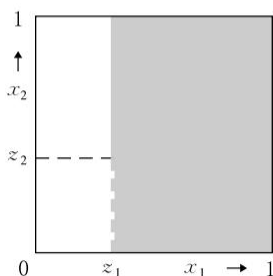


图 1.4 根据文中描述的词典式偏好关系所选出的优于 (z_1, z_2) 的选项集
注:该集合表示为图中的阴影部分,但不包括用虚线表示的那一部分边界。

命题 1.2:不能由效用函数表示的偏好关系

定义在集合 $\{(x_1, x_2): x_1, x_2 \in [0, 1]\}$ 上的(词典式)偏好 $\geq$,即当且仅当(1) $x_1 > y_1$ 或(2) $x_1 = y_1$ 且 $x_2 > y_2$ 时, $(x_1, x_2) \succ (y_1, y_2)$ 才成立,这个偏好关系不能由效用函数表示。

这个命题的证明比本书其他证明需要更多的数学知识。

证明:与命题 1.2 相反,假设某个函数 u 表示这个偏好关系 $\geq$ 。对任意 $x \in [0, 1]$,我们有 $(x, 1) \succ (x, 0)$,因此 $u(x, 1) > u(x, 0)$ 。定义一个函数 f ,给每个 $x \in [0, 1]$ 赋予一个处于 $(u(x, 0), u(x, 1))$ 之间的有理数,该有理数一定存在,因为任意两个数之间存在一个有理数。如果 $a > b$,那么有 $(a, 0) \succ (b, 1)$,可得 $u(a, 0) > u(b, 1)$,故 $(u(a, 0), u(a, 1))$ 和 $(u(b, 0), u(b, 1))$ 没有交集,而 $f(a)$ 取自 $(u(a, 0), u(a, 1))$, $f(b)$ 取自 $(u(b, 0), u(b, 1))$,因此,函数 f 是一一对一的。这个结论与康托尔(Cantor)的对角论证法矛盾,后者指出:不存在从集合 $[0, 1]$ 到可数集合(比如有理数集合)的一对一的函数。

如果一个效用函数可以表示某一给定的偏好关系,那么很多其他的效用函数也可以表示这个偏好关系。例如,如果效用函数 u 可以表示给定的偏好关系,那么 $(3u-7)$ 或其他形式为 $(au+b)$ 的函数也可以表示这个偏好关系,其中 a 是正数。事实上,我们有以下结论。

命题 1.3:效用函数的递增函数仍然是效用函数

设 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 是递增函数。如果 u 可以用来表示定义在 X 上的偏好关系 $\geq$,那么,对所有 $x \in X$,形式为 $w(x) = f(u(x))$ 的函数 w 也可以表示定义在 X 上的

偏好关系 $\succsim$ 。

证明:因为 u 可以用来表示定义在 X 上的偏好关系 $\succsim$, 所以, 当且仅当 $x \succsim y$ 时, 我们有 $u(x) \geq u(y)$, 于是有 $f(u(x)) \geq f(u(y))$ (给定 f 是增函数), 即 $w(x) \geq w(y)$ 。

课后习题

1. 双边关系的性质。假设 $\succsim$ 是一个偏好关系。

(1) 一种双边关系 $>$ 的含义是: 如果 $x \succsim y$ 成立且 $y \not\succsim x$ 不成立, 则有 $x > y$ 。请证明该双边关系是可传递且反对称的。

(2) 请证明, 如果 $x \succsim y$ 且 $y > z$ (或 $x > y$ 且 $y \succsim z$), 则 $x > z$ 成立。

2. 最劣选项。设 $\succsim$ 是定义在有限集合 X 上的偏好关系。

(1) 请证明, 当且仅当不存在 $x \in X$ 使得 $a > x$ 时, a 是集合 X 上基于 $\succsim$ 的最劣选项。

(2) 举例证明, 如果 X 不是有限集合, 那么在集合 X 中可能无法根据偏好关系得出最优选项和最劣选项。

3. 相似关系。假设有如下一个偏好形成机制: 某个人心中有函数 $v: X \rightarrow \mathbb{R}$, 它给每个选项 (比如商品) 赋予一个数值; 只有函数的值差异较大时才意味着偏好程度才有差异, 也就是说, 他对“相似”选项的偏好程度相同。具体来说, 如果 $v(x) - v(y) > 1$, 那么他相对于 y 更喜欢 x ; 如果 $-1 \leq v(x) - v(y) \leq 1$, 那么他认为 x 和 y 一样好。这个人的偏好关系一定是可传递的吗?

4. 等价关系。

(1) 举两个例子说明什么是等价关系。

(2) 在正整数集合上的双边关系 R : 如果 $(x+y)$ 是偶数, 则有 xRy 。请证明 R 是等价关系。

(3) 集合 X 的一个拆分(partition)是 X 的非空子集组成的一个集合, 集合 X 的每一个元素都属于且仅属于其中一个子集。例如, $\{\{1, 3, 5\}, \{2, 4, 6\}\}$ 是集合 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 的一个拆分。请证明, 定义在 X 上的每个等价关系 R 都能产生一个拆分 (当且仅当 xRy 时, x 和 y 在拆分后的同一个子集中)。

5. 双边关系性质的独立性。分别举出一例具有下述性质的双边关系: (1) 完备、可传递但不对称的双边关系; (2) 具有反身性、可传递性和对称性但不完备的双边关系。

6. 谢泼德音阶和埃舍尔。听一下谢泼德音阶 (Shepard scale), 再看看一张“彭罗斯阶梯” (Penrose stairs) 的图片。[网址 <http://techchannel.att.com/play-video.cfm/2011/10/10/aT&T-archives-a-Pair-of-Paradoxes> 上的视频将二者放在一起。M. C. 埃舍尔 (M. C. Escher) 的平版画《上升和下降》 (Ascending and De-

scending)正是对“彭罗斯阶梯”的艺术描绘]请解释一下这两个例子与传递性概念之间的联系。

7. 效用函数。设 X 是所有正整数的集合。

(1) 在所有数字中,某人最喜欢 8。如果比较不等于 8 的一对数字,他更偏好大一点的数字。请写出一个可以表示这些偏好的效用函数。

(2) 在所有数字中,某人最喜欢 8。如果比较不等于 8 的一对数字,他更偏好更接近 8 的数。请写出一个可以表示这些偏好的效用函数。

8. 效用函数。定义在正整数集合上的一种偏好关系为:如果(1) x 是偶数 y 是奇数,或(2) x 和 y 都是偶数且 $x > y$,或(3) x 和 y 都是奇数且 $x > y$,则相对于 y 更喜欢 x 。

(1) 请证明,不存在一个值为整数的效用函数可以表示这个偏好关系。

(2) 请找出一个值为实数的效用函数以表示这个偏好关系。

9. 可加的效用函数。某个人对公寓大楼中的公寓有自己的偏好。相对于位于 20 楼的有 4 个房间的一套公寓,他更喜欢位于 12 楼的有 5 个房间的一套公寓;相对于位于 12 楼的有 2 个房间的一套公寓,他更喜欢位于 5 楼的有 4 个房间的一套公寓;相对于位于 5 楼的有 5 个房间的一套公寓,他更喜欢位于 20 楼的有 2 个房间的一套公寓。

(1) 请证明这个人的偏好可以用某一个偏好关系来表示。

(2) 请证明这个偏好关系不能由可加效用函数 u 表示: $u(x) = f(r(x)) + g(l(x))$,其中 $r(x)$ 是房间数, $l(x)$ 是楼层号。

本章说明

Frisch 于 1926 年第一次提出偏好关系的概念(Frisch, 1957), Wold(1943)第一次分析了效用函数表示偏好关系这个问题。命题 1.2 是由 Debreu(1954, Footnote 1:164)提出的。本章的论述借鉴了 Rubinstein(2006a, Lecture 1)。

▶ 2

选择

2.1 选择和理性化的选择

上一章我们讨论了个人的偏好关系,这个概念描述了他对所有相关选项的态度。在这一章,我们研究个人如何做出选择,以描述个人的行为。偏好和选择是我们随后研究的经济学模型的基础。

上一章讲的概念——偏好关系,仅反映个人的态度,而非他实际做出的选择。在本章,我们将讨论选择的概念,它与偏好的含义完全不同。我将用模型来描述一个环境或场景,研究他在面对各种可能的选择时会做出怎样的决策。例如,假设我们要建立模型研究一个正在找工作的工人,要完整描述他的行为,不仅要知道如果世界上所有的工作机会都给他,他会选择哪个工作,还要知道如果只给他其中(任何)一部分工作机会,他会选择哪个工作。

正式地,设 X 是个人可能面临的所有选项的集合,选择问题(choice problem)是 X 的一个非空子集 A ,他要从 A 中选中的一个选项。选择函数(choice function)描述了在所有可能的选择问题中做出的选择。

定义 2.1: 选择问题和选择函数

给定集合 X , X 的选择问题是 X 的一个非空子集。而 X 的一个选择函数为每个选择问题 $A \subseteq X$ 找出 A 中的一个元素与之对应。

在经济学中,我们通常通过假设个人是理性的将个人的行为和态度结合起来,“理性”(rational)的意思是:

- 他有定义在 X 上的偏好关系。
- 不管在什么时候做出选择,他都知道所有可能的选项是什么。
- 他根据定义在由所有可能的选项构成的集合上的偏好关系,选出最好的一个选项。

请注意,这种理性模型并未对个人偏好的内容做任何假设。他的偏好用现实或世俗的标准衡量可能是“非理性的”,与他或我们眼中的他的个人福利不一致。例如,哪怕一个人做出的选择给他带来的是最大的痛苦(以某种方式衡量),根据我们的定义,这个人也是理性的,因为他的偏好可能是很特别的。

如果个人的偏好关系可以用效用函数 u 表示,那么其行为可以视为在 $x \in A$ 的约束下追求效用函数 u 最大化。正式地,可以将选择问题表示为:

$$\max\{u(x); x \in A\}$$

请注意,如果两个人有两个不同的严格偏好关系,且给定任意集合 A ,这两人都根据其偏好关系选出最优选项,那么这两人的选择函数就会不同。也就是说,如果有两个选项 x 和 y ,一人相对于 y 更喜欢 x ,另一人相对于 x 更喜欢 y ,那么第一个人的选择函数在选择问题为 $\{x, y\}$ 时的值为 x ,第二个人的选择函数在选择问题为 $\{x, y\}$ 时的值为 y 。

2.2 理性化的选择

人们在做决策时通常不会有意识地思考自己的偏好关系是什么样的。我们在构建模型的时候之所以假设个人是理性的,是因为尽管个人很少明确地根据自己的偏好关系选出最优选项,但通常几乎或者近似是以这种方式来做选择。做决策的个人不一定要能说清楚自己的偏好关系到底是什么样的。只要我们可以假设个人是以这种方式做选择的,那么假设个人会选最偏好的选项或最好的选项就是合理的。据此,我们给出以下定义。

定义 2.2: 理性化的选择函数

如果存在一个偏好关系,使得对每个选择问题而言,由选择函数给出的选项都是根据这个偏好关系找出的最优选项,那么这个选择函数就是理性化的。

请注意,这个定义要求从任意集合中选出的选项都是唯一的最优选项。如果我们仅要求选出的选项是最优的,但不是唯一最优的,那么根据任何一个使所有选项都是无差异的偏好关系,每个选择函数都是理性化的。我们将在 5.5 节再来讨论这个问题。

例 2.1 设 $X = \{a, b, c\}$ 。当选择问题为 $\{a, b, c\}$ 时选择函数的值为 a ,当选择问题为 $\{a, b\}$ 时选择函数的值为 a ,当选择问题为 $\{a, c\}$ 时选择函数的值为 a ,当选择问题为 $\{b, c\}$ 时选择函数的值为 b 。偏好关系 $\succsim$ 为: $a \succ b \succ c$,此时的选择函数可以由偏好关系 $\succsim$ 解释其合理性。也就是说,我们可以用选择函数来描述这个人的行为,就好像他总是根据 $\succsim$ 选出最优选项一样。

如果当选择问题为 $\{a, b\}$ 时选择函数的值为 a ,当选择问题为 $\{a, c\}$ 时选择函数的值为 c ,当选择问题为 $\{b, c\}$ 时选择函数的值为 b ,那么这个选择函数是不能被理性化的。如果这个选择函数可以被偏好关系 $\succsim$ 理性化,那么可得 $a \succ b$, $b \succ c$ 且 $c \succ a$,而这违背了偏好关系的可传递性。

此处的 X 包括 3 个选项,对应有 24 个可能的选择函数,但其中只有 6 个选择函数是理性化的。

下面我们举几个例子说明几种不同的选择步骤,并判断由此产生的选择函数是否是理性化的。

例 2.2: 中位数

某个人按从左向右的顺序对集合 X 中的选项进行排序。例如, X 可以是政治候选人的集合, 其排序反映了这些候选人从左倾到右倾的政治立场。在所有由可供挑选的选项组成的集合 A 中, 他总是选择位于中间的选项。准确来说, 如果可供挑选的选项的个数是奇数, 即 $a_1 < a_2 < \cdots < a_{2k+1}$ (k 是整数), 那么这个人将选择唯一的中位数 a_{k+1} ; 如果可供挑选的选项的个数是偶数, $a_1 < a_2 < \cdots < a_{2k}$, 那么这个人将选择 a_k , 即两个中位数中靠左的那个选项。

不难证明, 这个选择函数不是理性化的, 没有一个偏好关系能够合理解释它。假设集合 A 包括 5 个选项, $a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5$ 。如果要在集合 A 中做选择, 他会选择 a_3 ; 如果要在 $\{a_3, a_4, a_5\}$ 中做选择, 他会选择 a_4 。如果选择函数可以被偏好关系 $\succsim$ 合理解释, 那么由第一个选择可得 $a_3 \succ a_4$, 由第二个选择可得 $a_4 \succ a_3$, 二者互相矛盾。

请注意, 这个人的行为逻辑比较特殊: 他总是选择位于中间的选项。但是, 这种行为逻辑无法被描述为: 在可供选择的选项组成的集合上有一个偏好关系, 并据此选出最优选项。如果我们将选项的集合看作一系列位置参数的集合, 即 $Y = \{\text{中位数, 中位数偏左一个单位, 中位数偏右一个单位, 中位数偏左两个单位, 中位数偏右两个单位}\}$, 他的行为就是理性化的。因此, 第一个选择问题是 Y , 第二个选择问题是 $\{\text{中位数偏左一个单位, 中位数, 中位数偏右一个单位}\}$ 。当偏好关系 $\succsim$ 为“中位数 $\succ$ 中位数偏左一个单位 $\succ$ 中位数偏右一个单位 $\succ \cdots$ ”时, 他的选择函数就是理性化的, 可以由偏好关系 $\succsim$ 解释其合理性。

例 2.3: 牛排和三文鱼

Luce 和 Raiffa (1957: 288) 举了一个例子, 讲的是一个人到陌生城市的一家餐厅就餐的故事。

服务员跟他说餐厅没有菜单, 但今晚他可以花 2.5 美元点一份烤三文鱼或花 4 美元点一份牛排。如果在高级餐厅吃饭, 他会选择点一份牛排。但鉴于不熟悉这里的环境且价格与高级餐厅不同, 他点了一份三文鱼。不一会儿, 服务员从厨房过来, 一再道歉, 责怪厨师没有说清楚, 实际上今晚的菜品还有炸蜗牛和田鸡腿, 都是 4.5 美元一份。碰巧的是, 这两个菜都是这个人不爱吃的。按理说, 在知道自己不喜欢的这两个菜品后, 他应该仍然选择三文鱼, 然而他的回答却是: “太好了, 我要把三文鱼换成牛排。”

集合 X 包括四个主菜: 三文鱼、牛排、蜗牛、田鸡腿。这个人的行为无法根据定义在 X 上的偏好关系做出合理解释, 因为根据偏好关系, 菜单为 $\{\text{三文鱼, 牛排}\}$ 时这个人做出的选择为三文鱼, 可得三文鱼 $\succ$ 牛排; 而菜单为集合 X 时这个人做出的选择为牛排, 可得牛排 $\succ$ 三文鱼。二者之间存在矛盾。

对这个人的行为, 一个比较合理的解释是, 尽管在两个选择问题中都出现了牛排, 但是他认为这两个牛排不是同一道菜。如果菜单上包括蜗牛和田鸡腿, 那么他就觉得牛排的质量比较好; 如果不包括蜗牛和田鸡腿, 他就认为牛排的质量不好,

并且会选择三文鱼。

这个人的行为无法根据 X 上的偏好关系作出合理解释,但是如果选项集合为 {三文鱼,劣质牛排,优质牛排,炸蜗牛,田鸡腿},则这个人的行为可以由定义在这个集合上的偏好关系合理解释:

优质牛排 $>$ 三文鱼 $>$ 劣质牛排 $>$ 炸蜗牛 $>$ 田鸡腿

选择函数的概念隐含一个假设:如果不同的选择集合都包括某个选项,那这个选项在不同的选择集合中是相同的。上述例子中的选择函数之所以不是理性化的,是因为两个不同的选项被当成了同一个选项。

例 2.4:参加聚会

集合 $X = \{A, B_1, B_2\}$ 中的每个人都要组织一次聚会。他们三人之外的某个人可能会收到这三个人的聚会邀请,但是这个人只能参加其中一个聚会。 B_1 和 B_2 都是这个人的朋友,但是 B_1 和 B_2 的关系较为紧张。这个人的行为如下:第一种情况,如果他同时收到了 A 和 B_1 的邀请,那他接受 B_1 的邀请;第二种情况,如果他同时收到了三个人的邀请,那他接受 A 的邀请。在第二种情况下,他之所以这样做,是因为他担心如果接受 B_1 或 B_2 中某一个人的邀请,会被另一个人误解。显然,这个人的行为无法由定义在 X 上的偏好关系合理解释。原因很简单,与例 2.3 相似,选项 B_1 的含义因选择集合中是否包括选项 B_2 而有所不同。

017

2.3 性质 α

集合 B 是集合 A 的子集。如果从集合 A 中找出的最优选项也在集合 B 中,而从集合 A 中找出的最优选项与从 B 中找出的最优选项相同,那么我们就可以称选择函数满足性质 α 。我们可以证明:(1)任何一个根据偏好关系找出最优选项的选择函数都满足性质 α ;以及(2)任何一个满足性质 α 的选择函数都是理性化的。

定义 2.3:性质 α

给定集合 X ,如果对任意集合 A 和 B , $B \subset A \subseteq X$, $c(A) \in B$,都有 $c(B) = c(A)$,那么,可以说集合 X 的选择函数 c 满足性质 α 。

请注意,例 2.2、例 2.3、例 2.4 中的选择函数不满足性质 α 。

命题 2.1:理性化的选择函数满足性质 α

每个理性化的选择函数都满足性质 α 。

证明: 设 c 为集合 X 的一个理性化的选择函数,对任意集合 $A \subseteq X$, $c(A)$ 是根据偏好关系 $\geq$ 选出的最优选项。假设 $B \subset A$, $c(A) \in B$ 。由于对所有 $y \in A$ 有 $c(A) \geq y$,所以对所有 $y \in B$ 都有 $c(A) \geq y$,因此 $c(B) = c(A)$ 。

命题 2.2:满足性质 α 的选择函数是理性化的

如果 X 是有限集,则 X 的任意一个满足性质 α 的选择函数都是理性化的。

证明: 设 c 是集合 X 的满足性质 α 的选择函数。定义 n 表示 X 中选项的个

数。我们构建一个偏好关系以使这个选择函数 c 理性化。令 $c(X) = a_1$, $c(X \setminus \{a_1\}) = a_2$, $c(X \setminus \{a_1, a_2\}) = a_3$, 以此类推。也就是说, a_k 是在集合 X 除去元素 $a_1, \dots, a_{k-1}$ 后而找出的最优选项。

考虑一个定义为 $a_1 \succ a_2 \succ \dots \succ a_n$ 的偏好关系 $\succ$ 。令 A 是一个选择问题。将集合 A 中的选项按 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 的次序排列成一个序列。在 A 中根据 $\succ$ 选出的最优选项, 是这个序列中第一个属于 A 的元素(选项), 令其为 a_m 。根据我们定义的偏好关系, 可得 $c(\{a_m, a_{m+1}, \dots, a_n\}) = a_m$, 且由于 $A \subseteq \{a_m, a_{m+1}, \dots, a_n\}$, $a_m \in A$, 所以由性质 α 可得 $c(A) = a_m$ 。

2.4 满意即可

假如有一个雇主必须雇佣一名员工。他会按姓名的字母顺序逐个面试应聘的人, 一旦遇到一个他认为足够好的求职者他就结束面试。而如果没有人足够好, 他将选择最后一位参加面试的求职者。

令 X 表示求职者的集合。该雇主心中有一函数 $v: X \rightarrow \mathbb{R}$, 以评价求职者的质量, 且雇主心中有一个数字 v^* , 表示他希望求职者达到的最低水平, 也就是使他满意的水平。设 O 是集合 X 的某种排列方式(比如按姓名的字母顺序排列), 这个排列方式描述了老板面试求职者的顺序。给定集合 A , 将 A 中所有选项按顺序 O 排序。雇主选择集合 A 中按 O 排序的第一个满足 $v(a) \geq v^*$ 这个条件的求职者 ($a \in A$); 如果不存在满足 $v(a) \geq v^*$ 的求职者, 则雇主选择集合 A 中按 O 排序的最后一个求职者。

定义 2.4: 满意即可的选择函数

设 X 是一个有限集合。给定函数 $v: X \rightarrow \mathbb{R}$ (评价函数), 某个数字 v^* (满意水平), 以及集合 X 的顺序 O , 满意即可的选择函数(satisfying choice function) c 的定义如下。设 $A = \{a_1, \dots, a_K\}$, 其中 $a_1 O a_2 O \dots O a_K$, 那么:

$$c(A) = \begin{cases} a_k & \text{如果 } v(a_k) \geq v^* \text{ 且对 } l=1, \dots, k-1 \text{ 有 } v(a_l) < v^* \\ a_K & \text{如果对 } l=1, \dots, K \text{ 有 } v(a_l) < v^* \end{cases}$$

满足 $v(x) \geq v^*$ 的选项 x 都是令人满意的(satisfactory), 其他选项都是不令人满意的(unsatisfactory)。

命题 2.3: 满意即可的选择函数是理性化的

满意即可的选择函数是理性化的。

我们可以通过证明满意即可的选择函数满足性质 α 来证明这个结论(详见课后习题第 3 题)。接下来看一下如何直接证明这个命题。

证明: 假设 c 是满意即可的选择函数, 评价函数为 v , 满意水平为 v^* , 顺序为 O 。我们构建一个偏好关系 $\succ$ 以使 c 理性化。在偏好关系的顶端达到满意水平的选项构成集合 X^+ , 即 $X^+ = \{x \in X: v(x) \geq v^*\}$, 将 X^+ 按照顺序 O 放到偏好关系的前半部分。未达到满意水平的选项构成集合 X^- , 即 $X^- = \{x \in X: v(x) <$

$v^*\}$, 将 X^- 按照顺序 O 的逆序放到偏好关系的后半部分。[例如, 如果 $X = \{a, b, c, d\}$, O 是按字母顺序排列, $v^* = 0$, 且价值函数定义为 $v(a) = -1$, $v(b) = -2$, $v(c) = 1$, $v(d) = 3$, 那么偏好关系为 $c \succ d \succ b \succ a$ 。]

现在我们证明: 根据这个偏好关系, 选择函数 c 是理性化的。设 $A \subseteq X$ 。如果 A 包括 X^+ 的一个选项, 那么集合 A 中根据 $\succsim$ 选出的最优选项是在 $A \cap X^+$ 中根据顺序 O 的第一个选项, 即 $c(A)$ 。如果 A 中不包括 X^+ 的选项, 即 $A \subseteq X^-$, 那么集合 A 中根据 $\succsim$ 选出的最优选项是在集合 A 中根据顺序 O 的最后一个选项, 即 $c(A)$ 。

2.5 抽钱泵

我们之所以假设选择函数是理性化的, 是因为一个人与理性不一致的行为所带来的结果可能会损害其个人利益。

假设 X 包括三个选项 a, b, c , 可以理解为三个物品。假设某人的选择函数是非理性化的, 当选择问题为 $\{a, b\}$ 时选择函数的值为 a , 当选择问题为 $\{b, c\}$ 时选择函数的值为 b , 当选择问题为 $\{a, c\}$ 时选择函数的值 c 。这个选择函数的意思是, 对任意物品 x , 如果这个人拥有 x , 那么一定存在一个物品 y 使得个人愿意用 x 去交换; 因为相对于 x 他更喜欢 y , 所以他愿意额外付一些钱(可能金额很少)完成交换。假设每进行一次交换, 他都至少再支付 1 美元。这样的话, 某个投机者就可以先把 a 给一个人, 然后用 c 去交换 a , 这个投机者就得到 1 美元; 他再用 b 去交换 c , 再一次得到 1 美元; 最后用 a 去交换 b , 再一次得到 1 美元。经过这三次交换, 那个做选择的人与没交换之前一样拥有 a , 但是却比之前少了 3 美元。投机者可以重复这个过程, 就可以从这个做选择的人手中拿走更多的钱。这样的机制可以被称为抽钱泵(money pump)。

事实上, 对任何不满足性质 α 的选择函数, 都可能存在这样的靠交换获益的投机机会。假设存在集合 A 和 B , 有 $B \subset A \subseteq X$ 且 $c(A) \in B$ 、 $c(B) \neq c(A)$ 。那么, 这个投机的过程如下。

假设某人最初拥有 $c(A)$ 。(1)他愿意花一点钱, 用 $c(A)$ 去换 $B \setminus \{c(A)\}$ 中的选择吗? 让这个人在集合 B 中进行选择, 他会放弃 $c(A)$ 且从集合 B 中选择 $c(B)$ 。(2)他愿意花一点钱, 用 $c(B)$ 去换 $A \setminus \{c(B)\}$ 中的一个选择吗? 这个人在集合 A 中进行选择, 他会放弃 $c(B)$ 且从集合 A 中选择 $c(A)$ 。在这两个步骤之后, 投机者就赚到了钱, 他可以把这两个步骤不断重复下去。

这个靠交换获益的投机行为取决于做选择的那个人是否发现自己正在被人利用。读者不难理解, 抽钱泵足以证明人们的选择是理性化的这个假设的合理性。

2.6 非理性化选择行为的证据

大量研究表明, 人类的行为有时不会像我们所定义的那么理性。我们选取了

三个实验来证明这一点。在每个实验中,我们找出与理性行为假设不一致的那些行为的特征。第一个实验展示了某些人的选择不满足性质 α 的情况。第二个和第三个实验展示了“对选择集合的不同描述方式不影响个人的选择”这个假设不成立的情况。这些实验是在多年前进行的(详见本章末尾的说明)。本节报告的结果来自线上的实验(网址为 <http://gametheory.tau.ac.il>),实验对象主要为世界各地的大学生,这些学生与本书读者的学术背景差不多。

2.6.1 注意力效应

下面这几款相机,你选择哪个?

相机 A: 平均评分 9.1, 600 万像素。

相机 B: 平均评分 8.3, 900 万像素。

再做一个选择。

下面这几款相机,你选择哪个?

相机 A: 平均评分 9.1, 600 万像素。

相机 B: 平均评分 8.3, 900 万像素。

相机 C: 平均评分 8.1, 700 万像素。

在网站 <http://gametheory.tau.ac.il> 上,约有 1 300 人回答了这两个问题。结果如下表所示。

在 A 和 B 之间选择		在 A、B、C 之间选择	
相机 A	48%	相机 A	30%
相机 B	52%	相机 B	68%
		相机 C	2%

因此,相机 C 出现在选项集里以后,非但没让大家选择相机 C,反而让不少人选择了性能全面超越相机 C 的相机 B,而他们原本在面对两个选项的时候选择了相机 A。之所以出现这个结果,一种解释是,将相机 C 列入选项中,把大家的注意力吸引到各项指标都优于相机 C 的相机 B 上。另一种解释是相机 B 全面超越相机 C,这一点为选择相机 B 提供了理由,但这个理由并不适用于选择相机 A,因为相机 A 的指标并不全部优于相机 C。

2.6.2 表达方式效应

有时,一个人做出的选择会受到对各个选项的描述方式的影响。

你要转一次轮盘,可以转轮盘 A 或者转轮盘 B。转每个轮盘以后的结果如下表所示。

	白色	红色	绿色	黄色
轮盘 A	90% 0 美元	6% 45 美元	1% 30 美元	3% -15 美元
轮盘 B	90% 0 美元	7% 45 美元	1% -10 美元	2% -15 美元

你会选择转哪个轮盘？

上表中的美元金额表示每种颜色对应的奖金，与奖金额在同一单元格中的带百分号的数值表示转到每种颜色的概率。大约有 4 000 人参与了网站 <http://gametheory.tau.ac.il> 上的这个实验，其中约有 51% 的人选择了转轮盘 A。也就是说，本次实验对象中选择转轮盘 A 和转轮盘 B 的人数大致相等。

人们之所以选择轮盘 A，一种常见的解释为：这个问题较为复杂，所以参与者会通过“消除”相似的部分以简化问题。这两个轮盘转到白色所得的奖金相同；转到红色或黄色时所得的奖金差不多；忽略这三个颜色后就只剩绿色，如果转到绿色，转轮盘 A 所得的奖金远高于转轮盘 B。

下面是另一个选择问题。

你要转一次轮盘，可以转轮盘 C 或者转轮盘 D。转每个轮盘以后的结果如下表所示。

	白色	红色	黑色	绿色	黄色
轮盘 C	90% 0 美元	6% 45 美元	1% 30 美元	1% -15 美元	2% -15 美元
轮盘 D	90% 0 美元	6% 45 美元	1% 45 美元	1% -10 美元	2% -15 美元

你选择转哪个轮盘？

显然，D 优于 C。几乎所有 (93%) 在网站 <http://gametheory.tau.ac.il> 上参与实验的人，都选择转轮盘 D。

其实，轮盘 A 和轮盘 C 只是呈现方式不同（轮盘 A 中的黄色在轮盘 C 中分成了两个颜色）。轮盘 B 和轮盘 D 也是如此（轮盘 B 中的红色在轮盘 D 中分成了两个颜色）。呈现方式的不同，使得至少大约一半的人改用了新的选择方法：在选择轮盘 A 和轮盘 B 时，他们将一个复杂问题转化为一个简单问题；在选择轮盘 C 和轮盘 D 时，他们则直接比较赌金的大小。

2.6.3 心理账户

想象一下，你花 40 美元买了一张演出门票。到剧院以后却发现把票弄丢了。此时，你可以花同样的钱再买一张票。你真的会再买一张票吗？

现在考虑另一种情况。

想象一下,你打算去看一场演出。拿出钱包准备付 40 美元买票时,发现丢了 40 美元,但你仍有足够的现金买一张票。你会再买一张票吗?

在这两种情况下,你都要在以下这两个选择中二选一:

1. 比出门的时候少了 80 美元,看了演出。
2. 比出门的时候少了 40 美元,没看演出。

尽管在这两种情况下你面临的选择问题其实一样的,但是第二种情况下选择买票的人多于第一种情况。有 1 200 人参与了网站 <http://gametheory.tau.ac.il> 上的实验(第一种情况),其中有 65% 的人表示,发现弄丢了之前买的票,会再买一张票。有另外 1 200 人参与了网站上的实验(第二种情况),其中有 79% 的人表示,发现丢了 40 美元以后,会选择买票。这两个比例之所以不同,可能是因为在第一种情况下,人们将一张票的价格算作 80 美元,他们认为这个票价太贵了;而在第二种情况下,有些人认为丢了 40 美元和买票没关系,买票只花了 40 美元。

课后习题

1. 五种选择的程序。请判断定义在集合 X 上的以下五个选择函数是否为理性化的。如果你认为选择函数是理性化的,请找出一个可以合理解释这个选择函数的偏好关系;否则,请证明选择函数不是理性化的。
 - (1) 集合 X 由某一工作的应聘者组成。招聘负责人对应聘者的偏好是完备的。如果让他在集合 A 中作出选择,他会首先将集合 A 中的应聘者按名字的字母顺序排序,然后从头开始考核。只要下一个应聘者比上一个应聘者更好,他就继续考核。如果第 n 个应聘者是首位比第 $(n+1)$ 个应聘者更好的应聘者,他会停止考核并选择第 n 个应聘者。如果在这个过程中没有一个应聘者表现得比前一个应聘者差,那么他就选择最后一个应聘者。
 - (2) 集合 X 中包括 n 个篮球队,编号为 1 到 n 。这 n 个篮球队都参加了循环赛。也就是说,每个球队都要和其他各个球队分别打一场球。某个人知道在每场球赛中都是哪一队获胜。如果要从集合 X 中选择一个球队,他会选择获胜次数最多的球队。如果获胜次数最多的球队有多个,那他就选择其中编号最靠前的球队。
 - (3) 集合 X 由一组画组成。某个人心中有 L 个二元标准,其值或者取 0(不符合),或者取 1(符合标准)。比如,这些标准可以是:这幅画是否为现代的、画家是否有名、价格是否在 1 000 美元以上等。这些标准依次排列:标准₁, 标准₂, ..., 标准_L。如果这个人要从集合 X 中选择一幅画,他会首先剔除不满足第一个标准的那些画;在满足第一个标准的画中,再剔除不满足第二个标准的画;以此类推,直到只剩下一幅画。假设对任意两幅画来说,至少有一个标准让人们认为这两幅画是不同的。所以这个选择程序总会产生唯一的一个选择。

- (4) 某人心中有两个定义在集合 X 上的数值型函数, u 和 v 。对于任何集合 $A \subseteq X$, 首先找出集合 A 中使 u 的值最大的选项, 如果这个选项的 u 值大于等于 10, 就选择这个; 如果这个选项的 u 值小于 10, 就选集合 A 中使 v 的值最大的选项。
- (5) 某人对集合 X 有自己的偏好。每个选项不是红色就是蓝色。给定集合 $A \subseteq X$, 首先看集合 A 中哪个颜色的选项的数量更多, 再从最多的这个颜色的选项中挑出最优选项; 如果几个颜色的选项数量一样多, 那就从红色的选项中挑出最优选项。
2. 满足性质 α 的选择函数的性质。某人有一个满足性质 α 的选择函数。设有两个集合, A 和 B , 且 $c(A) \in B$, $c(B) \in A$ 。请证明 $c(A) = c(B)$ 。
3. 命题 2.3 的另一种证明。请证明任何一个满意即可的选择函数都满足性质 α , 以此来证明命题 2.3。
4. 满意即可的选择函数的变体。个人做出选择的程序仅有一点与满意即可的选择函数不同: 如果没有找到达到满意水平的选项, 就回过头在集合中选使 $v(x)$ 值最大的选项。请证明此人的这个选择函数满足性质 α , 并构建一个可以解释这个选择函数的偏好关系。
5. 非路径依赖。满足如下条件的选择函数被称为非路径依赖的:

如果 $A \cap B = \emptyset$, 有 $c(A \cup B) = c(\{c(A), c(B)\})$ 。

也就是说, 如果个人将选项的集合一分为二, 分成两个不相交的子集, 从每个子集中分别选出最优选项, 再从这两个最优选项中选出相对更好的, 那么最终选出的这个最优选项与从整个集合中直接选出的最优选项是一样的。

- (1) 设 c 是选择函数, 它的值是根据某一偏好关系从每一个集合中找出的最优选项。请证明 c 是非路径依赖的。
- (2) 请证明任意一个非路径依赖的选择函数都是理性化的(提示: 通过证明这个选择函数满足性质 α 来间接证明)。
6. 做朋友的原则。某人心中有两个定义在集合 X 上的数值型函数, u 和 v 。给定一个选择问题 A , 首先找到集合 A 中使 u 值最大的选项 x , 如果 $v(x) \geq v^*$, 就选择 x ; 如果 $v(x) < v^*$, 就选集合 A 中使 v 值最大的选项。[请注意, 这个选择函数与课后习题第 1 题中的(4)不同。]
- (1) 如果 v 衡量的是此人的福利, u 衡量的是他的一个朋友的福利, 请说明这个选择函数的现实含义。
- (2) 证明存在 X 、 u 、 v , 使得此人的选择程序是不是理性化的。
7. 命题 2.2 的扩展。设 X 是一个无限集合, c 是定义在集合 X 上的选择函数。用以下两步证明如果 c 满足性质 α , 那么 c 是理性化的。
- (1) 定义一个双边关系 $\geq$: 如果 $c(\{x, y\}) = x$, 则 $x \geq y$ 。请证明这一双边关系是一种偏好关系。
- (2) 证明对每一个选择问题 A , 当 $a \in A$ 时, $c(A) \geq a$ 。

8. 抽钱泵。如果一个商人认为 $2+3=6$, 他能在这个残酷的世界上活下来吗?

本章说明

性质 α 由 Chernoff(1954, Postulate 4:429) 提出。“满意即可”(satisfying) 这个概念由 Simon(1956) 提出。抽钱泵理论由 Davidson 等(1955:145—146) 提出。例 2.3 由 Luce 和 Raiffa(1957:288) 提出。2.6.2 小节的实验源自 Tversky 和 Kahneman(1986:S263—S265)。2.6.3 小节由 Tversky 和 Kahneman(1984:347—348) 提出。本章的阐述借鉴了 Rubinstein 的讲义(Rubinstein, 2006a, Lecture 3)。

▶ 3

不确定性下的偏好

3.1 彩票

在第1章中,我们讨论了对定义在任意一个选择集合上的偏好的模型。本章我们将研究一种特殊的模型:集合中的选项所带来的结果具有随机性。我们将这样一些选项称为彩票(lotteries)。例如,抽奖券是就一个彩票,它可能的结果有两个:第一,有0.001的概率得到一辆汽车;第二,有0.999的概率什么都得不到。我们也可以将假期视为彩票,假期中有0.3的概率碰到阴天,有0.7的概率会碰到晴天。

Z 是一个由被称为奖金的对象组成的集合,本章模型中的集合 X 由集合 Z 构造而成。一个彩票可以抽象为每笔奖金的金额及其相应的实现概率。为简单起见,我们仅研究奖金的笔数是有限的这类彩票。

定义 3.1 彩票

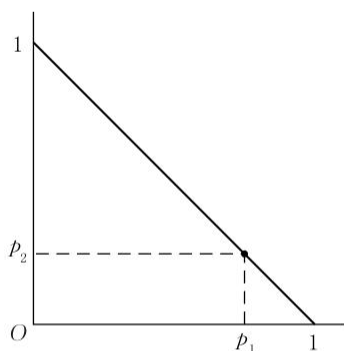
Z 表示奖金的集合。 Z 的彩票即函数 $p: Z \rightarrow \mathbb{R}$,即给每笔奖金赋予一个概率 p ,其中,获得某些奖金(笔数有限)的概率为正值 $p(z)$,而获得其他奖金的概率为0,且 $\sum_{z \in Z} p(z) = 1$ 。所有出现概率为正的奖金构成彩票 p 的支撑集(support),可以表示为 $\text{supp}(p)$,即 $\{z \in Z: p(z) > 0\}$ 。

我们用 $L(Z)$ 表示定义在集合 Z 上的所有彩票构成的集合,用 $[z]$ 表示获得奖金 z 的概率为1的彩票,用 $\alpha_1 \cdot z_1 \oplus \alpha_2 \cdot z_2 \oplus \cdots \oplus \alpha_K \cdot z_K$ 表示获得奖金 z_k 的概率为 α_k 的彩票,其中 $k=1, \dots, K$ 。

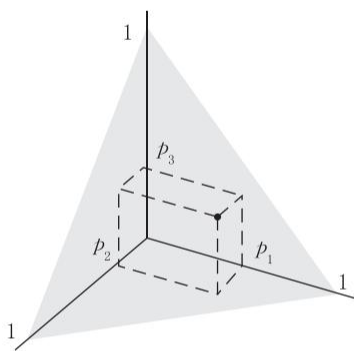
如果 Z 包括两笔奖金 z_1 和 z_2 ,集合 $L(Z)$ 中的每个彩票 p 都可以用 (p_1, p_2) 表示,其中 $p_1 = p(z_1)$ 和 $p_2 = p(z_2)$ 是获得这两笔奖金的概率, p_1 和 p_2 都是非负数,并且它们的和为1。这样的话, $L(Z)$ 可以表示为图3.1(a)中的灰色斜线。如果 Z 包括三笔奖金,同理, $L(Z)$ 可以表示为图3.1(b)中的三角形。

3.2 对彩票的偏好

我们对定义在集合 $L(Z)$ 上的偏好关系很感兴趣。 $L(Z)$ 相当于第1章所学模



(a) 彩票的集合 $L(\{z_1, z_2\})$ 。线段上的点 (p_1, p_2) 表示彩票 p , 且 $p(z_1) = p_1, p(z_2) = p_2$ 。



(b) 彩票的集合 $L(\{z_1, z_2, z_3\})$ 。三角形上的点 (p_1, p_2, p_3) 表示彩票 p , 其中 $p(z_1) = p_1, p(z_2) = p_2, p(z_3) = p_3$ 。

图 3.1 不同情况下的彩票集合

型中的集合 X 。下面我们来看几个例子。

例 3.1 悲观主义者

某人对奖金的集合 Z 有严格的偏好关系 $\succsim^*$, 且根据偏好关系, 以获得概率为正且偏好程度最低的奖金来(悲观地)评价彩票。也就是说, 如果彩票 q 中出现的概率为正且金额最低的奖金比彩票 p 中出现的概率为正且金额最低的奖金的金额少, 那么, 他会认为彩票 $p \in L(Z)$ 比彩票 $q \in L(Z)$ 更好。正式地表达为: 设 $w(p)$ 是支撑集 $\text{supp}(p)$ 中的一笔奖金, 使得对所有 $y \in \text{supp}(p)$ 都有 $y \succsim^* w(p)$ 。个人在集合 $L(Z)$ 上的偏好关系 $\succsim$ 可以定义为: 如果 $w(p) \succsim^* w(q)$, 则 $p \succsim q$ 。

请注意, 定义在集合 $L(Z)$ 上的悲观主义的偏好关系有很多种。

根据对集合 $L(Z)$ 的悲观主义偏好关系, 如果某人认为两个彩票中出现概率为正且偏好程度最低的奖金是无差异的, 那么他就认为这两个彩票是无差异的。这种悲观主义偏好关系存在一个变体, 即如果两个彩票可能获得的偏好程度最低的奖金是无差异的, 而其中一个彩票获得偏好程度最低的奖金的概率相对更低, 此人就会更偏好这个彩票。

例 3.2: 有奖有罚的彩票

某人将奖金的集合 Z 分成两个子集: 奖励(good)和惩罚(bad)。对任意一个彩票 $p \in L(Z)$, 设 $G(p) = \sum_{z \in \text{good}} p(z)$ 是奖励集合中所有的奖金出现的概率总和。如果彩票 p 的奖励集合中的奖金出现的概率之和不小于彩票 q 的奖励集合中的奖金出现的概率之和, 那么此人相对于彩票 $q \in L(Z)$, 更偏好彩票 $p \in L(Z)$ 。正式地表达为: 如果 $G(p) \geq G(q)$, 则 $p \succsim q$ 。

将集合 Z 划分成奖励集合和惩罚集合两个子集的方式可能不止一种, 不同的划分方式会产生不同的偏好关系。

例 3.3: 最少化奖金笔数

某人偏好可获得的奖金的笔数 $[\text{supp}(p)]$ 中奖金的笔数] 最少的彩票。正式地

表示为:如果 $|\text{supp}(p)| \leq |\text{supp}(q)|$, 则 $p \geq q$ 。这种偏好关系适用于那些不关心是否中奖, 只想为所有可能出现的结果(在生理和心理方面)都做好准备的人。

以上三种之外, 对彩票的偏好关系还有很多其他形式。接下来下面我们将讨论偏好关系的两个性质, 并找出所有由具有这两个性质的偏好关系组成的集合。

3.2.1 偏好的性质

连续性 假设对于奖金 a, b, c , 有 $[a] > [b] > [c]$ 。考虑形式为 $\alpha \cdot a \oplus (1-\alpha) \cdot c$ 的任意一个彩票($0 \leq \alpha \leq 1$)。偏好的连续性要求: 在从 $\alpha=1$ (此时彩票退化成确定性事件, 以概率1获得奖金 $[a]$, 它是优于 $[b]$ 的)到 $\alpha=0$ (彩票退化成确定性事件, 以概率1获得奖金 $[c]$, 它是劣于 $[b]$ 的)的区间内, α (至少有一次)会取某个值, 使得 $\alpha \cdot a \oplus (1-\alpha) \cdot c$ 和 $[b]$ 无差异。

定义 3.2: 连续性

对任意一个奖金集合 Z , 对集合 Z 中的奖金 a, b, c , 且 $[a] > [b] > [c]$, 如果存在一个数 α ($0 < \alpha < 1$)使得 $[b] \sim \alpha \cdot a \oplus (1-\alpha) \cdot c$, 那么对 $L(Z)$ 的偏好关系 $\geq$ 是连续的。

当 Z 包括至少三笔奖金时, 悲观主义者的偏好不是连续的: 如果 $[a] > [b] > [c]$, $\alpha < 1$ 时总有 $[b] > \alpha \cdot a \oplus (1-\alpha) \cdot c$ 。对有奖有罚彩票的偏好和最少化奖金笔数的偏好虽然满足连续性的条件, 但是没有意义, 因为根据这两种偏好关系, 不存在奖金 a, b, c 使得 $[a] > [b] > [c]$ 。

独立性 为讨论这个性质, 我们首先要定义一下复合彩票。设不确定性分为两个阶段: 先抽取彩票, 抽到彩票 p_k 的概率为 α_k , $k=1, \dots, K$; 再找到彩票 p_k 每笔奖金的出现概率, 奖金 z 的出现概率为 $p_k(z)$ 。在这种情况下, 最终获得每一笔奖金的概率为 $\sum_{k=1, \dots, K} \alpha_k p_k(z)$ 。请注意, 每笔奖金的概率 $\sum_{k=1, \dots, K} \alpha_k p_k(z) \geq 0$ 且所有奖金 z 的概率相加等于1。我们将获得每笔奖金的概率为 $\sum_{k=1, \dots, K} \alpha_k p_k(z)$ 的彩票称为复合彩票, 表示为 $\alpha_1 \cdot p_1 \oplus \dots \oplus \alpha_K \cdot p_K$ 。比如, 设 $Z = \{W, D, L\}$, 定义彩票 $p = 0.6 \cdot W \oplus 0.4 \cdot L$, $q = 0.2 \cdot W \oplus 0.3 \cdot D \oplus 0.5 \cdot L$ 。那么, 复合彩票 $\alpha \cdot p \oplus (1-\alpha) \cdot q$ 即:

$$(\alpha 0.6 + (1-\alpha) 0.2) \cdot W \oplus ((1-\alpha) 0.3) \cdot D \oplus (\alpha 0.4 + (1-\alpha) 0.5) \cdot L$$

定义 3.3: 复合彩票

设 Z 是奖金的集合, $p_1, \dots, p_K$ 是 $L(Z)$ 中的 K 个彩票, $\alpha_1, \dots, \alpha_K$ 是和为1的非负数。复合彩票 $\alpha_1 \cdot p_1 \oplus \dots \oplus \alpha_K \cdot p_K$ 是获得奖金 $z \in Z$ 的概率为 $\sum_{k=1, \dots, K} \alpha_k p_k(z)$ 的彩票。

下面我们来定义对彩票的偏好关系的第二个性质。

定义 3.4: 独立性

设 Z 是奖金的集合。如果对任意一个彩票 $\alpha_1 \cdot z_1 \oplus \dots \oplus \alpha_k \cdot z_k \oplus \dots \oplus \alpha_K \cdot$

z_K 和 $\beta \cdot a \oplus (1-\beta) \cdot b$, 以下条件成立, 则称定义在 $L(Z)$ 上的偏好关系 $\succsim$ 具有独立性:

$$\begin{aligned} [z_k] &\succsim \beta \cdot a \oplus (1-\beta) \cdot b \\ &\Leftrightarrow \\ &\alpha_1 \cdot z_1 \oplus \cdots \oplus \alpha_k \cdot z_k \oplus \cdots \oplus \alpha_K \cdot z_K \\ &\succsim \alpha_1 \cdot z_1 \oplus \cdots \oplus \alpha_k \cdot (\beta \cdot a \oplus (1-\beta) \cdot b) \oplus \cdots \oplus \alpha_K \cdot z_K \end{aligned}$$

这个性质的逻辑很简单: 彩票 $\alpha_1 \cdot z_1 \oplus \cdots \oplus \alpha_k \cdot z_k \oplus \cdots \oplus \alpha_K \cdot z_K$ 和彩票 $\alpha_1 \cdot z_1 \oplus \cdots \oplus \alpha_k \cdot (\beta \cdot a \oplus (1-\beta) \cdot b) \oplus \cdots \oplus \alpha_K \cdot z_K$ 只有第 k 项不同, 前者第 k 项是 z_k , 后者第 k 项是 $\beta \cdot a \oplus (1-\beta) \cdot b$ 。因此, 要比较这两个彩票, 自然就会想到比较 $[z_k]$ 和 $\beta \cdot a \oplus (1-\beta) \cdot b$ 。

悲观主义的偏好关系不满足偏好的独立性这个性质。设 $[a] > [b]$, 有两个彩票 p, q :

$$p = 0.6 \cdot a \oplus 0.4 \cdot b, \quad q = 0.6 \cdot b \oplus 0.4 \cdot b = [b]$$

这两个彩票只是在以概率 0.6 出现的奖金有所不同。已知 $[a] > [b]$, 于是, 偏好的独立性要求 $p > q$ 。然而, 对悲观主义者来说, 这两个彩票是无差异的, 因为这两个彩票的偏好程度最低的奖金是一样的 (b)。

最小化奖金笔数的偏好也不满足独立性: 对任意奖金 a 和 b , 假设彩票 $[a]$ 和 $[b]$ 是无差异的。根据最小化奖金笔数偏好的含义, 有 $0.5 \cdot a \oplus 0.5 \cdot b < 0.5 \cdot b \oplus 0.5 \cdot b$, 这与独立性的要求矛盾。

对有奖有罚彩票的偏好则满足独立性, 设彩票 $p = \alpha_1 \cdot z_1 \oplus \cdots \oplus \alpha_k \cdot z_k \oplus \cdots \oplus \alpha_K \cdot z_K$, 复合彩票 $q = \alpha_1 \cdot z_1 \oplus \cdots \oplus \alpha_k \cdot (\beta \cdot a \oplus (1-\beta) \cdot b) \oplus \cdots \oplus \alpha_K \cdot z_K$ 。

因为 $G(p) - G(q) = \alpha_k G([z_k]) - \alpha_k G(\beta \cdot a \oplus (1-\beta) \cdot b)$, 且 $\alpha_k > 0$, 所以 $[G(p) - G(q)]$ 和 $[G([z_k]) - G(\beta \cdot a \oplus (1-\beta) \cdot b)]$ 的正负相同。因此, 比较 p 和 q 之间的偏好关系得到的结论, 与比较 $[z_k]$ 和 $\beta \cdot a \oplus (1-\beta) \cdot b$ 之间的偏好关系得到的结论是相同的。

单调性 假设彩票中只有两笔出现概率为正的奖金 a 和 b , 且 $[a] > [b]$ 。如果按奖金 a 的出现概率的高低来给彩票排序的结果, 与对这些彩票的偏好程度的排序结果一样, 我们就称定义在 $L(Z)$ 上的偏好关系是单调的。也就是说, 单调的偏好关系根据 α 的值给形式为 $\alpha \cdot a \oplus (1-\alpha) \cdot b$ 的彩票排序。

引理 3.1 表明, 如果 $L(Z)$ 上的偏好关系满足独立性, 那么它一定是单调的。

引理 3.1: 独立性意味着单调性

设 Z 是奖金的集合。假设定义在 $L(Z)$ 上的偏好关系 $\succsim$ 满足独立性。设 a 和 b 是两笔奖金且 $[a] > [b]$, α 和 β 是两个概率, 则:

$$\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha \cdot a \oplus (1-\alpha) \cdot b > \beta \cdot a \oplus (1-\beta) \cdot b$$

证明: 设 $p_\alpha = \alpha \cdot a \oplus (1-\alpha) \cdot b$ 。由于 $\succsim$ 满足独立性, 所以 $p_\alpha > \alpha \cdot b \oplus (1-$

$\alpha) \cdot b = [b]$ 。再一次利用独立性的概念,我们可得 $p_a = (\beta/\alpha) \cdot p_a \oplus (1-\beta/\alpha) \cdot p_a \succ (\beta/\alpha) \cdot p_a \oplus (1-\beta/\alpha) \cdot b = \beta \cdot a \oplus (1-\beta) \cdot b$ 。

3.3 期望效用

下面我们引入经济学理论中最常见的偏好。当个人用以下办法来比较彩票时,就会涉及这种偏好。某人给每笔奖金 z 赋一个值,可以称为奖金的价值(或伯努利数),用 $v(z)$ 表示。他用彩票的期望价值 $\sum_{z \in Z} p(z)v(z)$ 来评价这只彩票。所以,此人的偏好定义如下:

如果 $\sum_{z \in Z} p(z)v(z) \geq \sum_{z \in Z} q(z)v(z)$, 则 $p \succcurlyeq q$

定义 3.5: 期望效用

对任何奖金集合 Z 而言,如果存在函数 $v: Z \rightarrow \mathbb{R}$, 使得对每个彩票 $p \in L(Z)$, 偏好关系 $\succcurlyeq$ 都可以用效用函数 $U(p) = \sum_{z \in Z} p(z)v(z)$ 表示, 那我们就可以说定义在彩票集合 $L(Z)$ 上的偏好关系 $\succcurlyeq$ 与期望效用一致。而函数 v 称为伯努利函数。

接下来,我们证明与期望效用一致的偏好关系满足连续性和独立性。

命题 3.1: 期望效用具有连续性和独立性

对彩票的偏好关系如果与期望效用一致,则此偏好关系满足连续性和独立性。

证明: 设 Z 是奖金的集合, $\succcurlyeq$ 是定义在 $L(Z)$ 上的偏好关系, $v: Z \rightarrow \mathbb{R}$ 是一个函数, 对任意一个彩票 $p \in L(Z)$, 函数 $U(p) = \sum_{z \in Z} p(z)v(z)$ 都可以表示 $\succcurlyeq$ 。

连续性 设 $a, b, c \in Z$ 且满足 $[a] \succ [b] \succ [c]$ 。对任意 $z \in Z$, 都有 $U([z]) = v(z)$ 。因此, $v(a) \succ v(b) \succ v(c)$ 。令 α 满足 $\alpha v(a) + (1-\alpha)v(c) = v(b)$ [即 $0 < \alpha = (v(b) - v(c)) / (v(a) - v(c)) < 1$], 因此有 $\alpha \cdot a \oplus (1-\alpha) \cdot c \sim [b]$ 。

独立性 假设有两个彩票 $\alpha_1 \cdot z_1 \oplus \dots \oplus \alpha_k \cdot z_k$ 和 $\beta \cdot a \oplus (1-\beta) \cdot b$, 可得:

$$\begin{aligned} & \alpha_1 \cdot z_1 \oplus \dots \oplus \alpha_k \cdot z_k \oplus \dots \oplus \alpha_K \cdot z_K \\ & \succcurlyeq \alpha_1 \cdot z_1 \oplus \dots \oplus \alpha_k \cdot (\beta \cdot a \oplus (1-\beta) \cdot b) \oplus \dots \oplus \alpha_K \cdot z_K \\ & \Leftrightarrow (\text{由表示 } \succcurlyeq \text{ 的 } U \text{ 的公式可得}) \\ & \alpha_1 v(z_1) + \dots + \alpha_k v(z_k) + \dots + \alpha_K v(z_K) \\ & \succcurlyeq \alpha_1 v(z_1) + \dots + \alpha_k \beta v(a) + \alpha_k (1-\beta) v(b) + \dots + \alpha_K v(z_K) \\ & \Leftrightarrow (\text{由代数运算可得}) \\ & \alpha_k v(z_k) \succcurlyeq \alpha_k \beta v(a) + \alpha_k (1-\beta) v(b) \\ & \Leftrightarrow (\text{由于 } \alpha_k > 0) \\ & v(z_k) \succcurlyeq \beta v(a) + (1-\beta) v(b) \\ & \Leftrightarrow (\text{由表示 } \succcurlyeq \text{ 的 } U \text{ 的公式可得}) \\ & [z_k] \succcurlyeq \beta \cdot a \oplus (1-\beta) \cdot b \end{aligned}$$

命题 3.2 是本章的主要内容,讲的是如果偏好关系满足连续性和独立性,则它与期望效用一致。也就是说,我们可以确定每笔奖金对于个人的价值,使得比较两个彩票的期望值就相当于根据偏好关系比较这两个彩票。

命题 3.2:具有连续性和独立性的偏好关系与期望效用一致

定义在彩票集合上的一个偏好关系,其奖金集合是有限集,如果该偏好关系具有连续性和独立性,那么它就与期望效用一致。

证明:设 Z 是奖金的有限集, $\succsim$ 是定义在 $L(Z)$ 上的偏好关系,且具有连续性和独立性。给 Z 中所有奖金编号,使 $[z_1] \succsim \cdots \succsim [z_K]$ 。设 $z_1 = M$ (偏好程度最高的奖金), $z_K = m$ (偏好程度最低的奖金)。

第一种情况: $[M] \succ [m]$ 。由连续性可得,对每笔奖金 z 都存在一个数 $v(z)$ 使得 $[z] \sim v(z) \cdot M \oplus (1-v(z)) \cdot m$ 。由单调性可得, $v(z)$ 是唯一的。已知彩票 $p(z_1) \cdot z_1 \oplus \cdots \oplus p(z_K) \cdot z_K$, 应用 K 次独立性的定义后,这个彩票和复合彩票 $p(z_1) \cdot (v(z_1) \cdot M \oplus (1-v(z_1)) \cdot m) \oplus \cdots \oplus p(z_K) \cdot (v(z_K) \cdot M \oplus (1-v(z_K)) \cdot m)$ 是无差异的。此复合彩票等于彩票 $(\sum_{k=1, \dots, K} p(z_k)v(z_k)) \cdot M \oplus (1 - \sum_{k=1, \dots, K} p(z_k)v(z_k)) \cdot m$ 。

已知 $[M] \succ [m]$, 由引理 3.1 可知,比较彩票 p 和 q , 相当于比较 $\sum_{k=1, \dots, K} p(z_k)v(z_k)$ 和 $\sum_{k=1, \dots, K} q(z_k)v(z_k)$ 的大小,而此二者分别是 p 和 q 的期望效用。

第二种情况: $[M] \sim [m]$ 。由独立性可得,对任意一个彩票 p , 有 $p \sim [M]$ 。也就是说,所有彩票都被认为是无差异的。在这种情况下,对所有 k , 设 $v(z_k) = 0$ 。那么,对任意 $p \in L(Z)$, 定义为 $U(p) = \sum_{z \in Z} p(z)v(z) = 0$ 的函数 U 可以表示这个偏好关系,这个函数就是 p 的期望效用。

评注

如果函数 $v: Z \rightarrow \mathbb{R}$ 是定义在 $L(Z)$ 上的偏好关系所对应的期望效用中的伯努利函数,那么对于任何正数 α 和任意 β , 函数 $w(z) = \alpha v(z) + \beta (z \in Z)$ 也是伯努利函数。实际上,反之也成立(此处省略相关证明):如果函数 $v: Z \rightarrow \mathbb{R}$ 和 $w: Z \rightarrow \mathbb{R}$ 都是表示某个偏好关系的伯努利函数,那么一定存在着某个正数 α 和某个数 β , 使得 $w(z) = \alpha v(z) + \beta (z \in Z)$ 。

3.4 理论和实验

本节我们将简单讨论一下预期效用模型与人类行为之间的一致性。下面这两个问题证明了两者的关系有时候是相互矛盾的。

想象一下,如果你必须在以下两个彩票中选一个:

L_1 : 以 0.2 的概率得到 4 000 美元,或者什么也得不到。

R_1 : 以 0.25 的概率得到 3 000 美元,或者什么也得不到。

你会选哪个彩票？

想象一下，如果你必须在以下两个彩票中选一个：

L_2 ：以 0.8 的概率得到 4 000 美元，或者什么也得不到。

R_2 ：一定会得到 3 000 美元。

你会选哪个彩票？

7 932 名学生在网站 <http://gametheory.tau.ac.il> 上回答了这两个问题，结果如下表所示：

	L_2	R_2
L_1	20%	44%
R_1	5%	31%

按照我们的定义，这些彩票为：

$$L_1 = 0.2 \cdot [4\,000 \text{ 美元}] \oplus 0.8 \cdot [0 \text{ 美元}]$$

$$\text{且 } R_1 = 0.25 \cdot [3\,000 \text{ 美元}] \oplus 0.75 \cdot [0 \text{ 美元}]$$

$$L_2 = 0.8 \cdot [4\,000 \text{ 美元}] \oplus 0.2 \cdot [0 \text{ 美元}] \text{ 且 } R_2 = [3\,000 \text{ 美元}]$$

请注意， $L_1 = 0.25 \cdot L_2 \oplus 0.75 \cdot [0]$ ， $R_1 = 0.25 \cdot R_2 \oplus 0.75 \cdot [0]$ 。因此，如果定义在 $L(Z)$ 上的偏好关系满足独立性，那么，对 L_1 和 R_1 偏好程度的排序，与对 L_2 和 R_2 的偏好程度的排序应该相同，即如果 $L_1 > R_1$ ，则有 $L_2 > R_2$ 。因此，如果人们对彩票有严格偏好，那么只有回答(1) L_1 和 L_2 或(2) R_1 和 R_2 的人的偏好，才可以用期望效用表示。大约 51% 的参与者的回答为(1)或(2)，他们的偏好可以用期望效用表示。

在剩下的参与者中，极少数(5%)选择了 R_1 和 L_2 。44% 的参与者选择了 L_1 和 R_2 这一最广泛的选择。这些参与者(本书的作者包括在内)都没有什么问题。但是，这样的选择是与期望效用理论相矛盾的，这个矛盾被称为阿莱悖论(Allais paradox)。

44% 的参与者之所以选择 R_2 而不是 L_2 ，有一种解释是：虽然选择 L_2 可能会多得 1 000 元，但选择 R_2 一定会获得 3 000 元，为了多得 1 000 元而冒着失去 3 000 元的风险实在太不值得。人们的这种想法与风险厌恶有关，我们将在下一节讨论这个问题。

很多人在比较 L_1 和 R_1 时采取了另一种考虑方式。此时，人们面临一个难题：提高获得奖金的可能性可能会导致奖金金额减少很多。概率 0.25 和 0.2 差不多，而 4 000 美元和 3 000 美元的奖金却差很多。因此，我们忽略概率上的差异，只关注奖金的差异，于是我们会选择 L_1 。

实验的组织者通常将这两个问题分配给不同的人，随机分给每个参与者一个问题。之所以这样做，是为了避免参与者猜出实验目的，那样的话，他们对第二个问题的回答可能会受到对第一个问题的回答的影响。但是，即使让所有人都回答这两个问题，我们得到的结果也差不多。

在看到我们的实验结果之后,很多人建议调整定义在彩票集合上偏好关系的具体形式。但是,在调整后的实验中,很多人的行为还是与这些新形式的偏好关系不一致,这说明每种理论最多只能解释一部分人的行为。

3.5 风险厌恶

在本章最后,我们来讨论对风险的态度。假设奖金的集合 Z 是非负实数的集合,把奖金 z 当成资金金额。我们用 $E(p) = \sum_{z \in \text{supp}(Z)} p(z)z$ 表示彩票 p 的期望价值。

如果某个人只关注彩票的期望收益,那么他是风险中性的,他对彩票的偏好可以用 $E(p)$ 表示。这样的偏好与期望效用一致——令 $v(z) = z$ 。如果对每个彩票 p ,与 p 的期望收益相等的一笔钱让某人认为它至少和彩票 p 一样好,那么他是风险厌恶的。也就是说,如果对任意 p 都有 $[E(p)] \succsim p$,那么偏好关系为 $\succsim$ 的人是风险厌恶者。对于任意不止有一笔奖金的彩票,如果某人相对于 p 更严格偏好于 $[E(p)]$,那么他是严格风险厌恶的。

定义 3.6: 风险厌恶和风险中性

假设 $Z = \mathbb{R}_+$, $E(p) = \sum_{z \in Z} p(z)z$, 如果对任意彩票 $p \in L(Z)$ 都有 $[E(p)] \succsim p$,那么定义在 $L(Z)$ 上的偏好关系 $\succsim$ 是风险厌恶的;如果对任意彩票 $p \in L(Z)$,且 p 包括不止一笔奖金,有 $[E(p)] \succ p$,那么偏好关系 $\succsim$ 是严格风险厌恶的;如果对任意彩票 $p \in L(Z)$ 有 $[E(p)] \sim p$,那么偏好关系 $\succsim$ 是风险中性的。

严格风险厌恶的人愿意支付某个金额的钱把彩票换成彩票的期望价值,因此

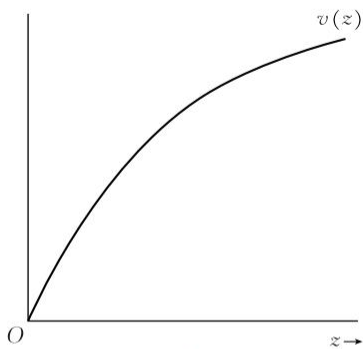


图 3.2 凹的伯努利函数

某人买保险的行为(一般会减少但不会消除风险)表明他的偏好是严格风险厌恶的。换句话说,一个喜欢赌博的人,实际上是花钱把一定金额的钱换成期望价值更低的彩票,他的偏好不是风险厌恶的。

我们可以讨论任意偏好关系是否具有风险厌恶的性质,不管这个偏好关系是否与期望效用一致。下面我们来证明,如果个人的偏好关系与期望效用一致,那么当且仅当期望效用中的伯努利函数是凹函数时,这个偏好关系才是风险厌恶

的。(如图 3.2 所示。)

命题 3.3: 风险厌恶和伯努利函数的凹性

设 $Z = \mathbb{R}_+$, $\succsim$ 是定义在 $L(Z)$ 上的偏好关系且与期望效用一致, v 是期望效用中的伯努利函数。那么当且仅当 v 是凹的, $\succsim$ 是风险厌恶的。

证明: 设 x, y 是两笔奖金, $\alpha \in [0, 1]$ 。如果 $\succsim$ 是风险厌恶的,则有 $[\alpha x + (1-\alpha)y] \succsim \alpha \cdot x \oplus (1-\alpha) \cdot y$, 于是, $v(\alpha x + (1-\alpha)y) \geq \alpha v(x) + (1-\alpha)v(y)$ 。也就

是说, v 是凹的。

现在假设 v 是凹的。由琴生不等式(Jensen's inequality)可得 $v(\sum_{z \in Z} p(z)z) \geq \sum_{z \in Z} p(z)v(z)$, 所以 $[\sum_{z \in Z} p(z)z] \geq p$ 。因此, 这个人是风险厌恶的。

课后习题

1. 最可能出现的奖金。某人以出现可能性最大的奖金的出现概率来评估彩票(他不在意奖金是多少)。也就是说, 对任意彩票 p 和 q , 如果 $\max_z p(z) \geq \max_z q(z)$, 则 $p \geq q$ 。如果此人认为所有奖金都无差异(例如, 奖金是去相似的地方免费度假), 并且他仅能为一个选择做好准备(与例 3.3 不同, 在例 3.3 中他想为所有选择都做好准备, 所以更偏好出现概率为正的奖金的笔数最少的彩票), 那么以最可能出现的奖金的出现概率来评价彩票是合理的。

请证明, 如果 Z 包括至少三笔奖金, 那么这个偏好关系是连续的, 但不是独立的。

2. 一个家长。一个家长有两个小孩, A 和 B 。他只有一个礼物。他觉得把礼物给哪个小孩都差不多, 但是相对于随便给其中一个小孩, 他更想掷硬币来决定给谁。

请解释一下, 为什么这个家长的偏好与期望效用不一致?

3. 比较最可能出现的奖金。某人对奖金的集合有偏好关系 $\geq^*$, 如果两个彩票的最可能出现的奖金都只有一笔, 那么要比较这两个彩票, 就要根据 $\geq^*$ 比较对这两个彩票最可能出现的奖金的偏好程度。假设 Z 包括至少三笔奖金。这个偏好关系具有连续性或独立性吗?
4. 两笔奖金。设集合 Z 包括两笔奖金 a 和 b 。请证明, 定义在 $L(Z)$ 上的偏好关系中只有三种满足独立性。
5. 简单彩票。设 Y 是一个有限集合。对任意 $\alpha \in [0, 1]$, $z \in Y$, 简单彩票 (α, z) 是指以 α 的概率获得 z 或者以 $(1-\alpha)$ 的概率什么也得不到的一个彩票。下面看一下定义在简单彩票的集合上的偏好关系。

如果对任意 $x, y \in Y$, 有 $(1, y) > (1, x)$, 存在一个概率 α 使得 $(\alpha, y) \sim (1, x)$, 那么则称偏好关系满足性质 A1。

当 $\alpha \geq \beta$ 时, 对任意 $x, y \in Y$, 比较 (α, x) 和 (β, y) 相当于比较 $(1, x)$ 和 $(\beta/\alpha, y)$, 那么则称偏好关系满足性质 A2。

- (1) 请证明, 如果个人心中有一个函数 v , v 给每个 z 分配一个函数值 $v(z) > 0$; 偏好关系 $\geq$ 定义为: 如果 $\alpha v(x) \geq \beta v(y)$, 则有 $(\alpha, x) \geq (\beta, y)$, 那么这个偏好关系满足性质 A1 和 A2。

- (2) 请举两个偏好关系的例子: 一个满足 A1 但不满足 A2, 一个满足 A2 但不满足 A1。

以下问题涉及的是 3.5 节描述的期望效用模型。在这个模型中, 个人是风险厌

恶的,且其偏好与期望效用一致。每一笔奖金是在他做决定并且最终结果确定之后,此人得到的货币数量。 v 表示伯努利函数, v 的期望值可以表示个人定义在 $L(Z)$ 上的偏好,假设 v 是可导的。

6. 额外彩票(additional lottery)。某人被推销一种彩票新玩法。每次彩票开奖以后,他都可以得到一个新的彩票,在这个新彩票中,他会以 $1/2$ 的概率得到 1 美元,以 $1/2$ 的概率被罚 1 美元。如果他决定接受这个新玩法,他面对的彩票 q 是什么样的? 请证明,如果他是严格风险厌恶的,会拒绝这个玩法。
7. 赌场。某人拥有财富 w ,他必须从中拿出金额为 x 的一笔钱,然后用它换取一个彩票,在这个彩票中,他会以 α 的概率获得金额为 $2x$ 的奖金,以 $(1-\alpha)$ 的概率什么也得不到(损失 x)。请证明, α 越大,他决定拿出的 x 就越大。
8. 保险。某人拥有财富 w ,并且担心万一概率为 p 的事故发生会使他损失 D 。他决定拿出金额为 x 的一笔钱以支付保险。如果事故发生,保险会赔付给他 λx (λ 是给定的)。
 - (1) 保险公司的期望利润是 $(x-\lambda px)$ 。假设 λ 是使期望利润为 0 的值,即 $\lambda = 1/p$ 。请证明,如果此人是风险厌恶的,他的最优决策是使 $x = pD$,即全额投保。在这种情况下,无论事故是否发生,他的净财富不变。
 - (2) 设 $p\lambda < 1$ (即保险公司的期望利润大于 0)。请证明,如果此人是严格风险厌恶的,他会选择部分投保,即 $\lambda x < D$ 。

本章说明

期望效用理论由 von Neumann 和 Morgenstern(1947:15—29, 617—628)提出。阿莱悖论(3.4 节)由 Allais(1953:527)提出。风险厌恶的定义(3.5 节)由 Pratt(1964)提出。本章的阐述借鉴了 Rubinstein(2006a, Lecture 7)。

▶ 4

消费者偏好

在本章和下一章,我们将在标准经济学理论框架下研究偏好和选择:个人对各种商品数量的考虑和选择。我们称这样的个人为消费者。本章与第1章类似,只讨论偏好,而不考虑选择的问题。下一章则与第2章类似,讨论消费者选择函数的性质。

4.1 商品组合

设消费者面临的所有选项的集合 X 为 $\mathbb{R}_+^2$, 是一对对非负数的集合。 $(x_1, x_2) \in X$ 是一个商品组合, 是两种商品的数量, 这两种商品可以称为1和2。

定义 4.1: 商品组合

令选项的集合为 $X = \mathbb{R}_+^2$, X 中的一个元素称为一个商品组合(bundle)。

商品可以是桌子、土豆、金钱或休闲时间之类的东西。更抽象地, 可以将商品推广到消费者心中考虑的任何事情; 他对 X 的偏好反映了他在这些事情之间的权衡。例如, 这两种商品可以是对两个项目的关注程度, 也可以是这个人的福利和他配偶的福利。

$X = \mathbb{R}_+^2$ 这个假设看上去似乎很奇怪, 因为讨论 π 个桌子或者 $\frac{1}{9}$ 辆车没什么意义。我们假设商品的数量为连续变量完全是为了方便模型处理: 当每种商品对于消费者都是多多益善且消费者受现实约束无法想要多少就能得到多少时, 假设商品数量是连续变量便于我们讨论消费者所面临的商品取舍问题。

二维正实数空间 $X = \mathbb{R}_+^2$ 上的代数运算很好理解。给定两个商品组合 x 和 y , $x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)^*$ 表示把 x 和 y 合并成一个新的商品组合。给定一个商品组合 x 和一个正数 λ , $\lambda x = (\lambda x_1, \lambda x_2)$ 表示 λ 倍的商品组合 x 。对任意大于1的整数 m , $(1/m)x$ 是将 x 等分成 m 份所形成的新商品组合。给定两个商品组合 x, y 和一个数值 $\lambda \in (0, 1)$, $[\lambda x + (1-\lambda)y]$ 位于空间 $\mathbb{R}_+^2$ 中连接 x 和 y 这两个商品组合的线段上。

* 原书有误, 误写为“ $x + y = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ ”。——译者注

4.2 对商品组合的偏好

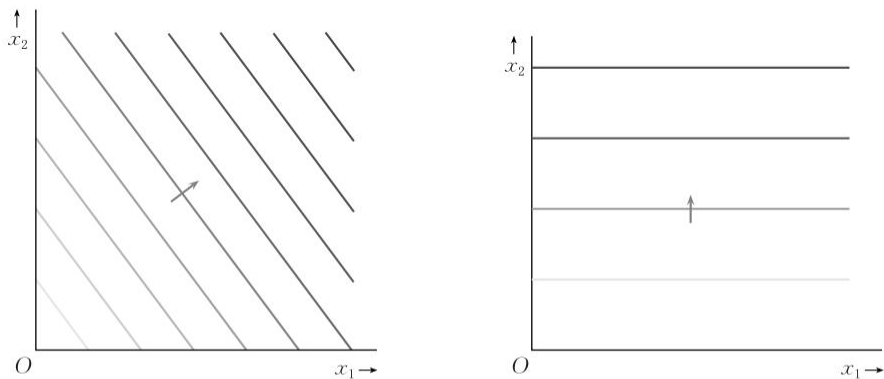
我们举几个有关商品组合偏好关系的例子。许多偏好关系用展示了几个无差异集合(有时称为无差异曲线)的图形可以更好地说明。给定偏好关系 $\succsim$ 和商品组合 a 时的无差异集合为 $\{y \in X: y \sim a\}$,它是所有与 a 无差异的商品组合所构成的集合。如果偏好关系 $\succsim$ 可以用效用函数 u 表示,商品组合 a 的无差异集合也可以表示为 $\{y \in X: u(y) = u(a)\}$,它是商品组合 a 的效用的等高线。

例 4.1: 商品替代比率不变

消费者心中有两个数 v_1 和 v_2 , v_i 是他给一单位的商品 i 所赋的值。他的偏好关系 $\succsim$ 定义为:如果 $v_1x_1 + v_2x_2 \geq v_1y_1 + v_2y_2$,则 $x \succsim y$ 。因此, $\succsim$ 可以用效用函数 $(v_1x_1 + v_2x_2)$ 表示。商品组合 (a_1, a_2) 的无差异集合为 $\{(x_1, x_2): v_1x_1 + v_2x_2 = v_1a_1 + v_2a_2\}$,它是一条斜率为 $-v_1/v_2$ 的直线。图 4.1(a)展示了这个偏好关系的一些无差异集合,无差异曲线的斜率为 $v_1/v_2 = \frac{4}{3}$ 。在图中,沿箭头所指的方向,他对商品组合的偏好程度是逐渐提高的。

例 4.2: 仅商品 2 有用

消费者只在意他喜欢的商品 2 的数量。他的偏好关系可以用效用函数 x_2 表示。这个偏好关系的无差异集合是一系列水平线,如图 4.1(b)所示。



(a) 例 4.1 中偏好关系的无差异集合($v_1/v_2 = \frac{4}{3}$) (b) 例 4.2 中偏好关系的一些无差异集合

图 4.1 例 4.1 和例 4.2 中偏好关系的无差异集合

例 4.3: 商品 1 达到最小数量之后再考虑商品 2

消费者在商品 1 的数量达到 10 之前,只关心商品 1 的数量,不在意商品 2 的数量;商品 1 的数量达到 10 之后才关心商品 2 的数量。准确来说,如果(1) $y_1 \leq 10$ 且 $x_1 \geq y_1$,或者(2) $x_1 > 10$, $y_1 > 10$,且 $x_2 \geq y_2$,那么 $(x_1, x_2) \succsim (y_1, y_2)$ 。

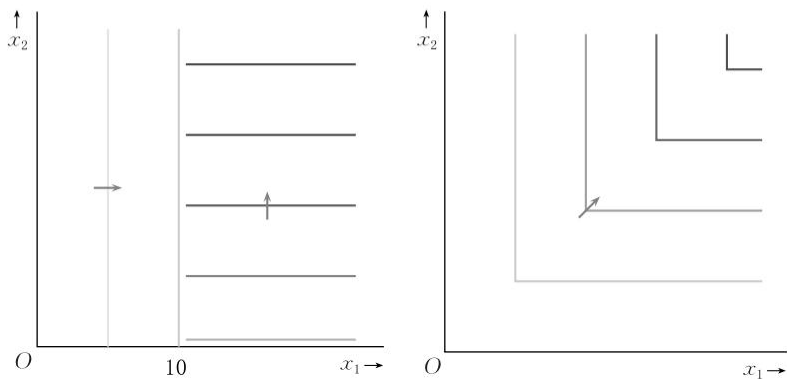
这个偏好关系可以用如下效用函数表示:

$$\begin{cases} x_1, & \text{如果 } x_1 \leq 10 \\ 11+x_2, & \text{如果 } x_1 > 10 \end{cases}$$

参见图 4.2(a)。请注意,效用水平大于 10 的无差异集合是半截水平线,且是左开区间。

例 4.4: 互补商品

消费者想要每种商品的数量都相等,且这个数量越大越好。也就是说,当且仅当 $\min\{x_1, x_2\} > \min\{y_1, y_2\}$ 时,相对于商品组合 y ,他更喜欢商品组合 x (想一想左右两只鞋之类的商品)。因此, $\min\{x_1, x_2\}$ 是一个效用函数,可以表示偏好关系[如图 4.2(b)所示]。



(a) 例 4.3 中偏好关系的无差异集合 (b) 例 4.4 中偏好关系的无差异集合

图 4.2 例 4.3 和例 4.4 中偏好关系的无差异集合

例 4.5: 理想的商品组合

消费者心中有理想的商品组合 x^* 。当且仅当根据某种测量距离的方式, x 与 x^* 的距离比 y 与 x^* 的距离更近时,那么相对于 y ,他更喜欢 x 。比如,用各商品数量与其理想的商品数量作差,取绝对值,再求和,得到该商品组合与理想商品组合的距离,也就是说,如果 $|x_1 - x_1^*| + |x_2 - x_2^*| \leq |y_1 - x_1^*| + |y_2 - x_2^*|$,则 $x \succsim y$ 。那么,可以表示这个偏好关系的效用函数为 $-(|x_1 - x_1^*| + |x_2 - x_2^*|)$ 。如图 4.3 所示。

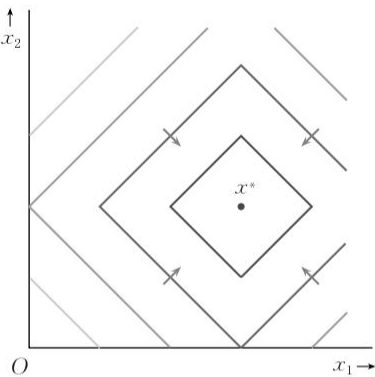


图 4.3 例 4.5 中偏好关系的无差异集合

例 4.6: 词典式偏好

消费者主要关注商品 1 的数量;如果两个商品组合中商品 1 的数量相同,那么他更偏好有更多商品 2 的商品组合。正式表达为,如果(1) $x_1 > y_1$ 或(2) $x_1 = y_1$ 且 $x_2 \geq y_2$,则 $x \succsim y$ 。根据这个偏好关系,对任意两个商品组合 x 和 y ,不是 $x \succ y$ 就是 $y \succ x$,所以,每个无差异集合都只包含一个点。词典式的偏好关系不能用效用函数表示(详见命题 1.2)。

在本章剩余小节中,我们将讨论经济模型中经常假定的几个消费者偏好的性质。

4.3 单调性

单调性是消费者偏好的性质之一,它实际上假设了商品可以给人们带来某些好处,因此多多益善。

定义 4.2:单调的偏好关系

如果

$$\begin{aligned} x_1 \geq y_1 \text{ 且 } x_2 \geq y_2 &\Rightarrow (x_1, x_2) \geq (y_1, y_2) \\ x_1 > y_1 \text{ 且 } x_2 > y_2 &\Rightarrow (x_1, x_2) > (y_1, y_2) \end{aligned}$$

那么,定义在 $\mathbb{R}_+^2$ 上的偏好关系 $\geq$ 是单调的。

因此,如果将商品组合 x 中的一个商品增加一定的数量得到新的商品组合 y ,那么根据单调的偏好关系 $\geq$,我们可得 $y \geq x$;如果将商品组合 x 中的两个商品都增加一定的数量得到新的商品组合 y ,那么根据单调的偏好关系 $\geq$,我们可得 $y > x$ 。例如,商品组合 $(3, 7)$ 的偏好程度高于 $(2, 6)$,可能高于 $(3, 5)$ 也可能与 $(3, 5)$ 无差异,但一定不会低于 $(3, 5)$ 。

下面这个性质是单调性的更强版本。如果商品组合 x 中一种商品的数量比商品组合 y 中对应商品的数量多,而 x 中另一种商品的数量不少于商品组合 y 中对应商品的数量,那么由强单调偏好关系 $\geq$,我们可得 $x > y$ 。

定义 4.3:强单调偏好关系

如果 $x_1 \geq y_1, x_2 \geq y_2$,且 $(x_1, x_2) \neq (y_1, y_2) \Rightarrow (x_1, x_2) > (y_1, y_2)$,那么定义在 $\mathbb{R}_+^2$ 上的偏好关系 $\geq$ 是强单调的。

下面这个表格列出了 4.2 节中每个例子的偏好关系是单调的,还是强单调的。

例 子	单调性	强单调性
例 4.1:商品替代比率不变	✓	当 $v_1 > 0$ 且 $v_2 > 0$ 时
例 4.2:仅商品 2 有用	✓	×
例 4.3:商品 1 达到最小数量之后再考虑商品 2	✓	×
例 4.4:互补商品	✓	×
例 4.5:理想的商品组合	×	×
例 4.6:词典式偏好	✓	✓

4.4 连续性

连续性是消费者偏好的另外一个性质,其含义是:如果某人对商品组合 x 的偏好程度高于商品组合 y ,那么,相对于与 y 商品数量接近的商品组合,他更偏好与

x 商品数量接近的商品组合。

定义 4.4: 连续的偏好关系

如果对任意 $x \succ y$ 都存在 $\epsilon > 0$, 且任意与 x 距离小于 ϵ 的商品组合 a , 任意与 y 距离小于 ϵ 的商品组合 b (商品组合 (w_1, w_2) 和 (z_1, z_2) 的距离为 $\sqrt{|w_1 - z_1|^2 + |w_2 - z_2|^2}$), 都有 $a \succ b$, 那么, 定义在 $\mathbb{R}_+^2$ 上的偏好关系 $\succsim$ 是连续的。

请注意, 词典式偏好关系不是连续的。举个例子: $x = (1, 2) \succ y = (1, 0)$, 但是对任意 $\epsilon > 0$, 商品组合 $a_\epsilon = (1 - \epsilon/2, 2)$ 与 x 的距离小于 ϵ , 但 $a_\epsilon \prec y$ 。

命题 4.1: 连续的偏好关系和连续的效用函数

如果定义在 $\mathbb{R}_+^2$ 上的偏好关系 $\succsim$ 可以用连续的效用函数表示, 那么, $\succsim$ 是连续的。

证明: 设 $\succsim$ 是一个偏好关系, u 是可以表示 $\succsim$ 的连续的效用函数。令 $x \succ y$, 于是 $u(x) > u(y)$ 。由 u 的连续性可知, 存在一个足够小的 $\epsilon > 0$, 使得 $u(a) > u(x) - \epsilon$ 且 $u(y) + \epsilon > u(b)$, 其中, 商品组合 a 与 x 之间的距离小于 ϵ , 商品组合 b 与 y 之间的距离小于 ϵ 。因此, 对所有这样的商品组合 a 和 b , 我们有 $u(a) > u(x) - \epsilon > u(y) + \epsilon > u(b)$, 故 $a \succ b$ 。

评注

1. 命题 4.1 的逆命题也成立: 如果偏好关系是连续的, 这个偏好关系可以用连续的效用函数表示。这个逆命题的证明涉及相对复杂的数学知识, 本书不提供相关证明。
2. 如果 $\succsim$ 是定义在集合 X 上的连续的偏好关系且 $a \succ b \succ c$, 那么连接 a 和 c 的线段上存在一个商品组合与 b 是无差异的。也就是说, 存在一个数值 $0 < \lambda < 1$ 使得 $\lambda a + (1 - \lambda)c \sim b$ 。这个性质类似于之前章节中讨论的彩票空间上的偏好的连续性。

4.5 凸性

现有五位竞选同一职位的候选人, 人们认为他们的政治立场如下所示。候选人越靠左, 其政治立场的左倾色彩越强; 候选人越靠右, 其政治立场的右倾色彩越强。

——D——A——C——B——E——

假设有个人告诉你他只关心候选人的政治立场, 并且与 B 相比他更喜欢 A 。关于他的偏好, 你还可以得出其他结论吗?

你可能会推断出相对于 B 他更喜欢 C , 因为如果政治立场从 B 转到 A 时他的偏好程度会增加, 那么政治立场从 B 到 C 时他的偏好程度也应该增加。但是, 你可能不太确定在 A 和 C 两个政治立场(候选人)之间他更偏好哪个: 你可能觉得他

更偏好 A (如果你相信他更喜欢左倾立场的话); 你也可能觉得他更偏好 C (如果你认为他最喜欢候选人 C 的政治立场)。我们的直觉是不对称的: 如果一个改变 (比如把选择从 B 改成 A) 使得某人得到的效用更高, 那么比其幅度小的部分改变 (比如把选择从 B 改成 C) 也会使他得到的效用更高; 如果一个改变使得他得到的效用更低, 那么比其幅度小的部分改变却可能使他得到的效用更高。

我们很容易就得出另一个结论: 如果某人相对于 B 更偏好 A , 那么相对于 E 他更偏好 B , 因为他不可能既偏好政治立场比 B 左倾的候选人, 又偏好政治立场比 B 右倾的候选人。但此人可能相对于 A 更偏好 D (如果他最偏好 D), 也可能相对于 D 更偏好 A (如果他最偏好 A)。

通过讨论这个例子, 我们可以定义偏好的一个性质——凸性, 我们经常在经济理论中假设偏好关系具有凸性。

定义 4.5: 凸的偏好关系

如果 $a \succcurlyeq b \Rightarrow$ 对所有 $\lambda \in (0, 1)$ 都有 $\lambda a + (1-\lambda)b \succcurlyeq b$, 则定义在 $\mathbb{R}_+^2$ 上的偏好关系 $\succcurlyeq$ 是凸的; 如果 $a \succcurlyeq b$ 且 $a \neq b \Rightarrow$ 对所有 $\lambda \in (0, 1)$ 都有 $\lambda a + (1-\lambda)b \succ b$, 则定义在 $\mathbb{R}_+^2$ 上的偏好关系 $\succcurlyeq$ 是严格凸性的。

从图形来看, $[\lambda a + (1-\lambda)b]$ 是位于商品组合 a 到商品组合 b 连线上的商品组合, 所以凸偏好关系的含义是: 如果 a 至少和 b 一样好, 在 a 到 b 的连线上的商品组合也至少和 b 一样好。而严格凸性偏好关系的含义为: 在 a 到 b 的连线上的商品组合, 除了两端的端点外, 都比商品组合 b 好。如图 4.4(a) 和图 4.4(b) 所示。

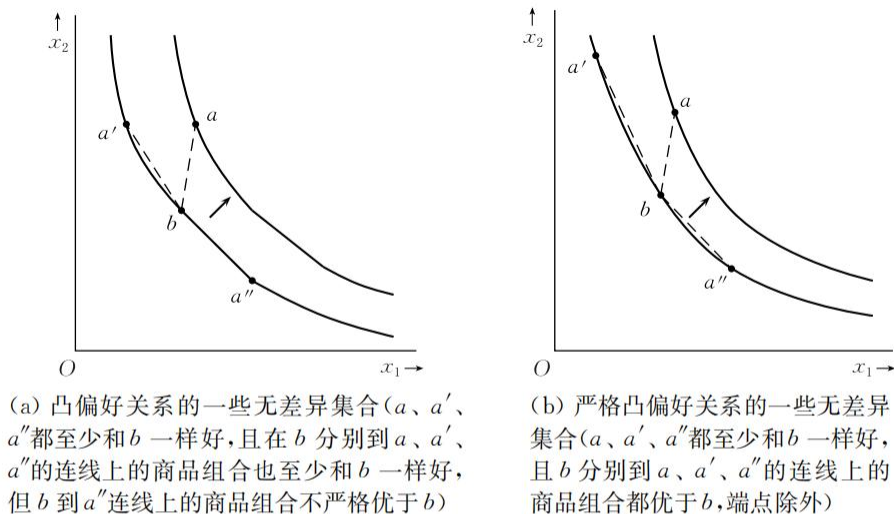


图 4.4 凸偏好关系与严格凸偏好关系的无差异集合

例 4.7: 凸的词典式偏好关系

词典式偏好关系是凸的, 证明如下。假设 $(a_1, a_2) \succcurlyeq (b_1, b_2)$ 。如果 $a_1 > b_1$, 那么对任意 $\lambda \in (0, 1)$ 都有 $\lambda a_1 + (1-\lambda)b_1 > b_1$, 因此 $\lambda a + (1-\lambda)b \succ b$ 。如果 $a_1 = b_1$, 那么 $\lambda a_1 + (1-\lambda)b_1 = b_1$ 。在这种情况下, $a_2 \geq b_2$, 可得 $\lambda a_2 + (1-\lambda)b_2 \geq b_2$, 因

此, $\lambda a + (1-\lambda)b \geq b$ 在两种情况下都成立。

命题 4.2: 凸偏好关系的特点

当且仅当对所有 $x^* \in X$, 集合 $\{x \in X: x \geq x^*\}$ (包括了所有至少和 x^* 一样好的商品组合) 是凸的, 定义在 $\mathbb{R}_+^2$ 上的偏好关系 $\geq$ 才是凸的。

证明: 假设 $\geq$ 是凸的。设 $a, b \in \{x \in X: x \geq x^*\}$ 。不失一般性, 令 $a \geq b$ 。如果偏好关系 $\geq$ 是凸的, 有 $\lambda a + (1-\lambda)b \geq b$, $\lambda \in (0, 1)$; 由偏好的传递性可得 $\lambda a + (1-\lambda)b \geq x^*$, 于是 $\lambda a + (1-\lambda)b \in \{x: x \geq x^*\}$, 因此集合 $\{x \in X: x \geq x^*\}$ 是凸的。

现在假设对所有 $x^* \in X$, 集合 $\{x \in X: x \geq x^*\}$ 是凸的。如果 $a \geq b$, 可得 $a \in \{x \in X: x \geq b\}$ 。给定 $b \in \{x \in X: x \geq b\}$, 根据集合凸性的定义有 $\lambda a + (1-\lambda)b \in \{x \in X: x \geq b\}$ 。因此, $\lambda a + (1-\lambda)b \geq b$ 。

命题 4.3 涉及凹函数的定义。如果对任意 $a, b \in X$, $\lambda \in (0, 1)$, 都有 $u(\lambda a + (1-\lambda)b) \geq \lambda u(a) + (1-\lambda)u(b)$, 那么函数 $u: X \rightarrow \mathbb{R}$ 是凹函数。

命题 4.3: 能用凹函数表示的偏好是凸的

如果定义在 $\mathbb{R}_+^2$ 上的偏好关系能用凹函数表示, 那么这个偏好关系是凸的。

证明: 设 $\geq$ 是一个偏好关系且能用凹函数 u 表示。假设 $a \geq b$, 可得 $u(a) \geq u(b)$ 。 u 是凹函数, 可得 $u(\lambda a + (1-\lambda)b) \geq \lambda u(a) + (1-\lambda)u(b) \geq u(b)$ 。于是, $\lambda a + (1-\lambda)b \geq b$, 因此, $\geq$ 是凸性的。

请注意, 凸的偏好也可以用非凹的效用函数来表示。例如, 如果一个凸的效用函数可以用凹函数 $\min\{x_1, x_2\}$ 表示, 那它也可以用 $(\min\{x_1, x_2\})^2$ 表示, 而 $(\min\{x_1, x_2\})^2$ 不是凹函数。

强单调的偏好关系的凸性与边际替代率递减有关。假设有三个商品组合 $a = (10, 10)$, $b = (11, 10-\beta)$, $c = (12, 10-\beta-\gamma)$, 且 $a \sim b \sim c$ 。如果商品 1 的数量从 10 增加到 11, 且商品 2 的数量减少 β , 消费者会认为数量变动前后的商品组合是无差异的; 如果商品 1 的数量再增加 1 单位, 且商品 2 的数量再减少 γ , 消费者会认为数量变动前后的商品组合是无差异的。我们接下来要证明: 如果消费者的偏好关系是强单调且凸的, 则有 $\beta \geq \gamma$ 。也就是说, 随着商品 1 数量增加, 消费者为增加一单位的商品 1 所愿意放弃的商品 2 的数量是递减的。我们采用反证法。假设 $\beta < \gamma$, 则有 $\beta < \frac{1}{2}(\beta + \gamma)$, 那么由强单调性可得 $(11, 10 - \frac{1}{2}(\beta + \gamma)) < b = (11, 10 - \beta)$ 。但 $(11, 10 - \frac{1}{2}(\beta + \gamma)) = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}c$, 由偏好关系是凸的可以推出 $\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}c \geq c$, 于是有 $(11, 10 - \frac{1}{2}(\beta + \gamma)) \geq c \sim b$, 自相矛盾。因此, $\beta < \gamma$ 不成立。

4.6 可微性

我们通常假设消费者偏好是平滑的无差异集合, 可以用平滑的无差异曲线表

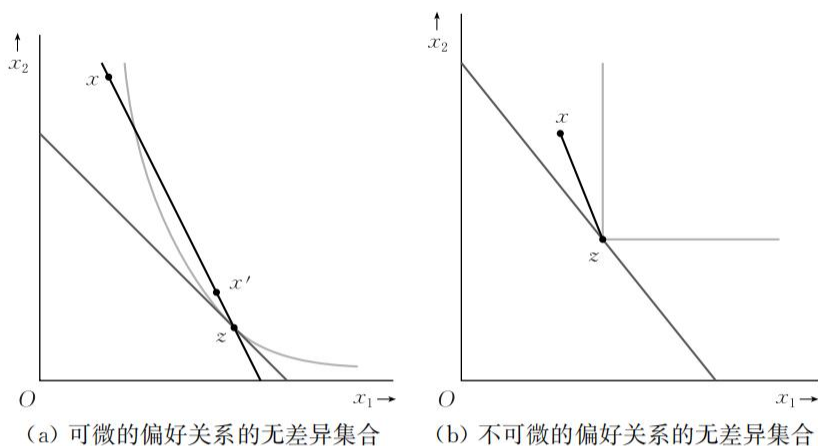


图 4.5 可微与不可微偏好关系的无差异集合

示,如图 4.5(a)所示。相反,图 4.5(b)中的无差异曲线不是平滑的。无差异曲线是否平滑取决于偏好关系是否具有可微性。我们只讨论具有单调的凸偏好关系的可微性。

定义 4.6: 可微的偏好关系

如果对任意商品组合 z 都存在一对非负值 $(v_1(z), v_2(z))$ (称为在 z 点的边际价值),使得对于所有满足 $v_1(z)\delta_1 + v_2(z)\delta_2 > 0$ 的 δ_1, δ_2 ,都存在 $\epsilon > 0$ 使 $z + (\epsilon\delta_1, \epsilon\delta_2) \succ z$ 成立,那么,定义在 $\mathbb{R}_+^2$ 上的单调且凸的偏好关系 $\succsim$ 是可微的。

从图形上来看,这个定义的含义是,对任何给定的商品组合 z ,都存在一条直线[图 4.5(a)中深灰色的这条直线],使得对这条直线上方的任意一个商品组合 x ,从 z 到 x 的线段上的任何充分接近的 z 的商品组合[例如图 4.5(a)中的 x']的偏好程度一定高于 z 。图 4.5(b)中的无差异集合则不具有可微性。存在一条经过 z 的直线,使得所有偏好程度高于 z 的商品组合都位于直线的上方[如图 4.5(b)中深灰色的直线]。如果在这条直线上方存在一些商品组合,如图中的 x ,使 x 到 z 的线段上不存在偏好程度高于 z 的商品组合,此偏好关系是不可微的。

$v_1(z)$ 和 $v_2(z)$ 可以理解为消费者对 z 的商品数量偏离一点这种微小变化所带来的价值。如果消费者的偏好关系是可微的,那么存在一个足够小的 $\epsilon > 0$,使得在 $v_1(z)\delta_1 + v_2(z)\delta_2 > 0$ 的情况下,从商品组合 z 转变为商品组合 $z' = (z_1 + \epsilon\delta_1, z_2 + \epsilon\delta_2)$ 会带来偏好程度的提高。(需要注意两点:第一, $v_1(z)$ 和 $v_2(z)$ 的具体值是什么并不重要,有实质性影响的是二者的比值 $v_1(z)/v_2(z)$;第二,如果 $(v_1(z), v_2(z))$ 是一对边际价值,那么 $(\alpha v_1(z), \alpha v_2(z))$ 也是一对边际价值,其中 $\alpha > 0$)。

命题 4.4 的证明比较复杂,此处省略。它的含义是:如果一个偏好关系可以用一个有连续偏导数的效用函数来表示,那么这个偏好关系是可微的且它的一对偏导数就是对应的一对边际价值。

命题 4.4: 边际价值和偏导数

如果 $\mathbb{R}_+^2$ 上的偏好关系是单调且凸的,且可以用效用函数 u 表示(u 有连续偏

导数),那么这个偏好关系是可微的,且对任意商品组合 z 来说,它的一对边际价值就是 u 在 z 这个点的一对偏导数。

因此,比如 $u(x_1, x_2) = x_1 x_2$, 可以用这个效用函数 u 表示的偏好关系是可微的,且对任意商品组合 z 来说, $(v_1(z), v_2(z)) = (z_2, z_1)$ 是一对边际价值。

课后习题

- 三个例子。用经济学的语言表述以下这三个偏好关系;如果可以的话,给出可以表示这些偏好关系的效用函数;画出几条典型的无差异曲线;并判断这三个偏好关系是否具有单调性、连续性、凸性。
 - 当且仅当 (x_1, x_2) 与 $(0, 0)$ 的距离大于 (y_1, y_2) 与 $(0, 0)$ 的距离时,消费者相对于 (y_1, y_2) 更偏好 (x_1, x_2) 。提示: (z_1, z_2) 到 (z'_1, z'_2) 的距离为 $\sqrt{(z_1 - z'_1)^2 + (z_2 - z'_2)^2}$ 。
 - 我们将每种商品的数量相等的商品组合称为平衡的商品组合,将每种商品的数量不相等的商品组合称为不平衡的商品组合。相对于不平衡的商品组合,消费者更偏好平衡的商品组合。如果都是平衡的商品组合,那么消费者偏好商品数量最多的那个商品组合。如果都是不平衡组合,消费者偏好商品 2 数量更多的那个商品组合。
 - 消费者最关心商品数量的总和;如果两个商品组合的商品数量总和相等,他更偏好商品 1 数量更多的那个商品组合。
- 再看三个例子。有三个偏好关系分别可以用如下三个效用函数表示。请画出几条典型的无差异曲线,并判断(但不需要给出完整证明)这三个偏好关系是否具有单调性、连续性和凸性:
 - $\max\{x_1, x_2\}$;
 - $(x_1 - x_2)$;
 - $[\log(x_1 + 1) + \log(x_2 + 1)]$ 。
- 连续的偏好关系。偏好关系 $\succeq$ 是单调且连续的,因此可以用递增且连续的效用函数 u 表示。请证明:对任意商品组合 x 都存在一个商品组合 y , 其中 $y_1 = y_2$, 使得 $y \sim x$ 。
- 拟线性偏好。一个偏好关系可以由效用函数 $u(x_1, x_2) = x_2 + g(x_1)$ 表示,其中 g 是连续增函数。
 - 从图形上看,这个偏好关系的任意一条无差异曲线与其余无差异曲线有什么关系?
 - 请证明:如果 g 是凹函数,那么这个偏好关系是凸的。
- 最大化最小值偏好关系(maxmin preference)。请证明:可以用效用函数 $\min\{x_1, x_2\}$ 表示的偏好关系是凸的。
- 理想的商品组合。请证明例 4.5 中的偏好关系(消费者心中有理想的商品组合)

具有连续性和凸性。

7. 一个偏好关系比另一个偏好关系更重视某种商品。如果对所有正数 α 和 β 都有 $(x_1 - \alpha, x_2 + \beta) \succsim_A (x_1, x_2) \Rightarrow (x_1 - \alpha, x_2 + \beta) \succ_B (x_1, x_2)$, 那么我们可以说偏好关系 $\succsim_A$ 比偏好关系 $\succsim_B$ 更重视商品 1。

(1) 请举例说明有这样关系的两个偏好关系。

(2) 偏好关系 $\succsim_A$ 可以由 $(2x_1 + x_2)$ 表示, 偏好关系 $\succsim_B$ 可以由 $(x_1 + x_2)$ 表示, 请解释一下, 为什么 $\succsim_A$ 比 $\succsim_B$ 更重视商品 1?

(3) 请解释一下, 为什么词典式偏好(例 4.6)比任何强单调的偏好关系都更重视商品 1?

本章说明

4.4 节最后提到: 每个连续的偏好关系都能由连续的效用函数表示, 这个结论由 Debreu(1954)提出。本章的论述, 特别是对可微性的解释, 借鉴了 Rubinstein (2006a, Lecture 4)。

5

消费者行为

在本章,我们将第2章所讨论的个人选择模型应用于消费者行为的研究。消费者面对的选项的集合 X 为 $\mathbb{R}_+^2$,是商品组合的集合;每一个选择问题都是 X 的子集。正如我们在第2章中提到的,要完整描述个人的行为,我们需找出他在每个可能面临的选择问题中所做出的选择。但不是每个 X 的子集都是消费者的选择问题。由于我们对价格和消费者选择之间的关系比较感兴趣,所以我们主要关注面临被称为预算集(budget set)的这种特定类型的选择问题时消费者的行为。

5.1 预算集

消费者的选择问题是指,给定商品的价格和他拥有的财富,他所能购买的商品组合的集合。我们称这个集合为消费者的预算集。准确来说,给定价格 p_1 、 p_2 和财富 w ,消费者可以用 p_1 单位的财富交换一单位的商品1,用 p_2 单位的财富交换一单位的商品2,消费者的预算集是消费者能用财富 w 交换的所有商品组合所组成的集合。

定义 5.1: 预算集

对任意正数 p_1 、 p_2 、 w ,当价格为 (p_1, p_2) 时,拥有财富 w 的消费者的预算集为 $B((p_1, p_2), w) = \{(x_1, x_2) \in X: p_1x_1 + p_2x_2 \leq w\}$ 。

因此,集合 $\{(x_1, x_2) \in X: p_1x_1 + p_2x_2 = w\}$ 是消费者的预算约束线。

几何上来讲,预算集的形状就如图5.1所示的那个三角形。请注意,不等式 $\lambda p_1x_1 + \lambda p_2x_2 \leq \lambda w$ 和 $p_1x_1 + p_2x_2 \leq w$ 是等价的,所以如果将财富和价格同时乘以同一个正整数,预算集不变,即对于任何 $\lambda > 0$, $B((\lambda p_1, \lambda p_2), \lambda w) = B((p_1, p_2), w)$ 。

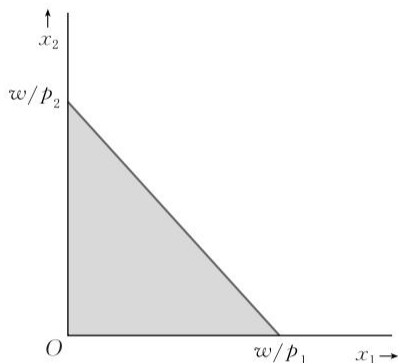


图 5.1 预算约束线的图示

注:消费者拥有财富 w ,商品的价格分别为 p_1 和 p_2 ,浅灰色的三角形是预算集 $\{(x_1, x_2) \in X: p_1x_1 + p_2x_2 \leq w\}$ 。深灰色的线是预算约束线。

预算集都是凸性的,证明如下。

如果 a 和 b 都属于集合 $B((p_1, p_2), w)$, 可得 $p_1 a_1 + p_2 a_2 \leq w$ 、 $p_1 b_1 + p_2 b_2 \leq w$, 于是, 对任意 $\lambda \in [0, 1]$ 都有:

$$\begin{aligned} & p_1(\lambda a_1 + (1-\lambda)b_1) + p_2(\lambda a_2 + (1-\lambda)b_2) \\ &= \lambda(p_1 a_1 + p_2 a_2) + (1-\lambda)(p_1 b_1 + p_2 b_2) \leq w \end{aligned}$$

因此, $(\lambda a_1 + (1-\lambda)b_1, \lambda a_2 + (1-\lambda)b_2)$ 也属于集合 $B((p_1, p_2), w)$ 。

图 5.1 也标出了预算约束线: 满足 $p_1 x_1 + p_2 x_2 = w$ 的所有的商品组合 (x_1, x_2) 的集合, 它是一条斜率为负的直线。这个等式也可以表示为 $x_2 = (-p_1/p_2)x_1 + w/p_2$, 斜率 $-p_1/p_2$ 表示消费者面临的交换比例: 多消费一单位的商品 1, 就需要少消费 p_1/p_2 单位的商品 2。

因此, 消费者的每一个选择问题就是两个直角边位于两条坐标轴上的(浅灰色的)直角三角形(见图 5.1)。每一个这样的三角形都由一组 $((p_1, p_2), w)$ 产生。当我们对消费者的处境做不同假设的时候, 也会得到类似的选择问题。比如, 我们不假设消费者可以用他的财富以给定的价格购买商品, 而是假设他最初拥有一个商品组合 e , 并且可以用一单位的商品 1 交换 β 单位的商品 2。那么, 他的选择问题为 $\{(x_1, x_2) \in X: (e_1 - x_1)\beta \leq x_2 - e_2\}$ 或 $\{(x_1, x_2) \in X: \beta x_1 + x_2 \leq \beta e_1 + e_2\}$, 它等同于预算集 $B((\beta, 1), \beta e_1 + e_2)$ 。

5.2 需求函数

消费者的选择函数, 又称需求函数, 从每个预算集中挑出一个元素, 即商品组合。这里, 预算集被定义为 $B((p_1, p_2), w)$, 其中, p_1 、 p_2 、 w 都是正数(在后面的章节中, 预算集会有不同的定义)。因此, 可以用 $B((p_1, p_2), w)$ 的一个函数描述消费者行为。

定义 5.2: 需求函数

需求函数是表示预算集与商品组合之间关系的一个函数, 记为函数 x , 即 $x((p_1, p_2), w)$ 是当预算集为 $B((p_1, p_2), w)$ 时给出的商品组合。

请注意, 因为 $B((\lambda p_1, \lambda p_2), \lambda w) = B((p_1, p_2), w)$, 所以对所有的 $((p_1, p_2), w)$ 和 $\lambda > 0$, 都有 $x((\lambda p_1, \lambda p_2), \lambda w) = x((p_1, p_2), w)$ 。

定义 5.2 并未假设需求函数是消费者选择最大化其偏好程度的结果。我们对于那些并非源自此类最优化行为的行为模式也很感兴趣。

在下面这几个需求函数的例子中, 消费者都是根据简单的规则(并非最大化偏好程度)做出选择。在每个例子中, 对所有的 $((p_1, p_2), w)$ 和 $\lambda > 0$, 都有 $x((\lambda p_1, \lambda p_2), \lambda w) = x((p_1, p_2), w)$ 。

例 5.1: 用所有的财富购买最便宜的商品

消费者只买便宜的商品; 如果两个商品的价格相同, 他将财富平分用于购买这两种商品。此时的需求函数为:

$$x((p_1, p_2), w) = \begin{cases} (w/p_1, 0), & \text{如果 } p_1 < p_2 \\ (w/(2p_1), w/(2p_2)), & \text{如果 } p_1 = p_2 \\ (0, w/p_2), & \text{如果 } p_1 > p_2 \end{cases}$$

例 5.2: 购买等量的商品

消费者购买等量的每种商品且花掉其所有的财富, 此时的需求函数为:

$$x((p_1, p_2), w) = (w/(p_1 + p_2), w/(p_1 + p_2))$$

例 5.3: 花等量的财富购买每种商品

消费者花等量的财富购买每种商品, 此时的需求函数为:

$$x((p_1, p_2), w) = (w/(2p_1), w/(2p_2))$$

例 5.4: 先购买一种商品达到起步量

消费者先尽可能多的购买商品 1, 一旦商品 1 的数量买够 7 单位, 再用剩下的财富购买商品 2。此时的需求函数为:

$$x((p_1, p_2), w) = \begin{cases} (w/p_1, 0), & \text{如果 } w/p_1 \leq 7 \\ (7, (w - 7p_1)/p_2), & \text{否则} \end{cases}$$

5.3 理性的消费者

理性的消费者有固定的偏好关系, 他根据这个偏好关系从预算集中选出最优的商品组合。根据给定的偏好关系在预算集中找出最优选项——我们将这个问题称为消费者问题。

定义 5.3: 消费者问题

给定定义在 $\mathbb{R}_+^2$ 上的偏好关系 $\succsim$ 和正数 p_1, p_2, w , 消费者问题是指根据 $\succsim$ 从预算集 $B((p_1, p_2), w)$ 中选出最优的商品组合。如果 $\succsim$ 可用效用函数 u 表示, 那么消费者问题可以表示为:

$$\max_{(x_1, x_2) \in X} u(x_1, x_2) \quad \text{s.t.} \quad p_1 x_1 + p_2 x_2 \leq w$$

以下命题给出了消费者问题的几个基本性质。

命题 5.1: 消费者问题的解

给定 $\mathbb{R}_+^2$ 的偏好关系 $\succsim$ 和预算集。

- (1) 如果偏好关系是连续的, 那么消费者问题有一个解。
- (2) 如果偏好关系是严格凸的, 那么消费者问题最多有一个解。
- (3) 如果偏好关系是单调的, 那么消费者问题的解一定位于预算约束线上。

证明: (1) 如果偏好关系是连续的, 那么这个偏好关系可以用连续的效用函数来表示(详见命题 4.1 下方的评注 1)。已知两种商品的价格都是正数, 预算集是紧集合, 从数学上很容易证明这个连续的效用函数在预算集中有最大值, 即消费者问题的解。

(2) 假设商品组合 a 和 b 都是消费者问题的解, 那么商品组合 $(a+b)/2$ 也在这个预算集中(预算集是凸的); 由偏好关系的严格凸性可得, $(a+b)/2$ 严格优于 a 和 b 。矛盾。

(3) 假设最优的商品组合 (a_1, a_2) 在消费者预算集中, 其中价格为 p_1, p_2 , 财富为 w , 但不在预算约束线上。那么 $p_1 a_1 + p_2 a_2 < w$, 于是存在一个足够小的 $\epsilon > 0$, 使得 $p_1(a_1 + \epsilon) + p_2(a_2 + \epsilon) < w$, 因此 $(a_1 + \epsilon, a_2 + \epsilon)$ 也在预算集中。由偏好关系的单调性可得, $(a_1 + \epsilon, a_2 + \epsilon)$ 的偏好程度高于 (a_1, a_2) , 因此, (a_1, a_2) 不可能是消费者问题的解。

下面两个例子给出了特定的偏好关系下消费者问题的解。

例 5.5: 互补品

当两种商品是互补品时, 消费者的偏好关系可以用效用函数 $\min\{x_1, x_2\}$ 表示(详见例 4.4)。这个偏好关系是单调的, 所以消费者问题的解 (x_1, x_2) 一定位于预算约束线上: $p_1 x_1 + p_2 x_2 = w$ 。由于 $p_1 > 0, p_2 > 0$, 所以 (x_1, x_2) 需要满足 $x_1 = x_2$ 。反之, 不妨假设 $x_1 > x_2$, 那么存在一个足够小的 $\epsilon > 0$ 使得商品组合 $(x_1 - \epsilon, x_2 + \epsilon p_1/p_2)$ 也在预算集中, 且偏好程度高于 x 。与 x 是最优商品组合矛盾。因此, 此时消费者问题有唯一的解 $(w/(p_1 + p_2), w/(p_1 + p_2))$ 。请注意, 在这种情况下尽管偏好关系是凸的, 但不是严格凸性的, 消费者问题仍只有唯一的解。

例 5.6: 替代品

当两种商品互为替代品时, 消费者会让两种商品的数量总和最大。也就是说, 他的偏好关系可以表示为 $(x_1 + x_2)$ (详见例 4.1, $v_1 = v_2$), 如果这两种商品只在消费者不在意的方面有所不同, 那么这个偏好关系是合理的。如果 $p_1 \neq p_2$, 则当 $p_1 < p_2$ 时消费者问题有唯一解 $(w/p_1, 0)$, 当 $p_1 > p_2$ 时消费者有唯一解 $(0, w/p_2)$ 。如果 $p_1 = p_2$, 那么预算线上的所有商品组合都是消费者问题的解。

5.4 可微偏好

如果消费者的偏好关系是单调的、凸的、可微的, 那么对任意商品组合 z , 边际价值 $v_1(z)$ 和 $v_2(z)$ 可以表示每种商品在 z 点对于消费者的价值。如果 z 的商品数量发生一个小的变化, 当且仅当这个变化使得由在 z 点的边际价值所表示的商品组合的价值上升时, 才可以说这个变化对消费者来说是一种改善。当且仅当 $-\alpha v_1(z) + \beta v_2(z) > 0$ 或 $\beta/\alpha > v_1(z)/v_2(z)$ 时, 消费者才会认为放弃少量(α 单位)的商品 1 来换取 β 单位的商品 2 是可取的。同理, 当且仅当 $\alpha v_1(z) - \beta v_2(z) > 0$ 或 $\beta/\alpha < v_1(z)/v_2(z)$ 时, 消费者认为放弃少量(β 单位)的商品 2 来换取 α 单位的商品 1 是可取的。 $v_1(z)/v_2(z)$ 称为商品组合 z 的边际替代率。

定义 5.4: 边际替代率

给定定义在 $\mathbb{R}_+^2$ 上一个单调、凸的、可微的偏好关系和一个商品组合 z , z 的边

际替代率为 $v_1(z)/v_2(z)$, 可以表示为 $MRS(z)$, 其中, $v_1(z)$ 和 $v_2(z)$ 是 z 对消费者的边际价值。

命题 5.2 讲的是, 如果消费者的偏好关系是单调、凸性、可微的, 消费者问题的解具有哪些特征。

命题 5.2: 边际替代率和价格比率

设消费者在 $\mathbb{R}_+^2$ 上的偏好关系是单调、凸的、可微的, 如果 x^* 是消费者问题 (p_1, p_2, w) 的解, 那么:

- (1) $x_1^* > 0$ 且 $x_2^* > 0 \Rightarrow MRS(x^*) = p_1/p_2$;
- (2) $x_1^* = 0 \Rightarrow MRS(x^*) \leq p_1/p_2$;
- (3) $x_2^* = 0 \Rightarrow MRS(x^*) \geq p_1/p_2$ 。

证明: 为证明(1), 用 $v_1(x^*)$ 和 $v_2(x^*)$ 表示 x^* 的边际价值。不妨假设 $x_1^* > 0$, $x_2^* > 0$, 且 $MRS(x^*) = v_1(x^*)/v_2(x^*) < p_1/p_2$ 。对任意 $\epsilon > 0$, 令 $y(\epsilon) = x^* + (-\epsilon, \epsilon p_1/p_2)$ [如图 5.2(a) 所示]。由于 $p_1 y_1(\epsilon) + p_2 y_2(\epsilon) = p_1(x_1^* - \epsilon) + p_2(x_2^* + \epsilon p_1/p_2) = w$, 所以, $y(\epsilon)$ 也位于预算约束线上。而 $v_1(x^*)(-\epsilon) + v_2(x^*)(\epsilon p_1/p_2) = -\epsilon[v_1(x^*) - (p_1/p_2)v_2(x^*)] > 0$, 于是, 根据此偏好关系的可微性可知, 存在 $\epsilon > 0$ 使得 $y(\epsilon) \succ x^*$, 这与 x^* 是消费者问题的解相矛盾。

同理可证(2)和(3), 如图 5.2(b) 所示。请注意, 如果 $x_1^* = 0$ 时的商品组合 x^* 是最优的, 不等式 $MRS(x^*) < p_1/p_2$ 并不与 x^* 是最优组合相矛盾, 因为消费者不能减少商品 1 的数量(数量已经为 0)来换取一定量的商品 2。因此, 在这种情况下, x^* 是消费者问题的解意味着不等式 $MRS(x^*) \leq p_1/p_2$ 成立, 而非等式 $MRS(x^*) = p_1/p_2$ 成立。

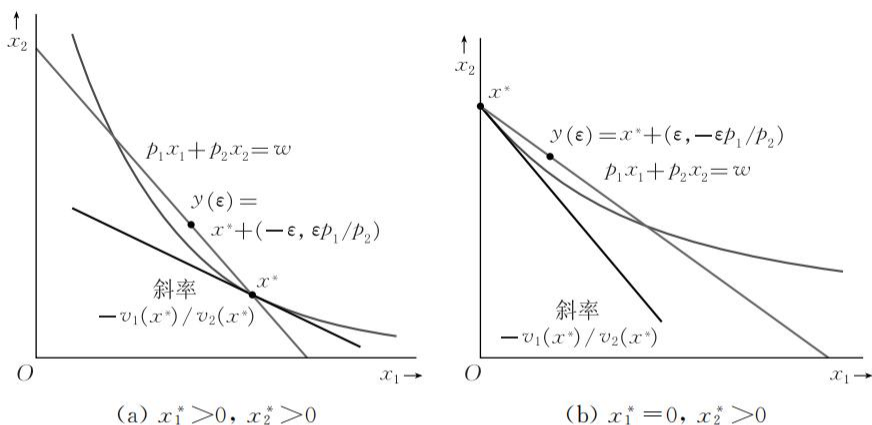


图 5.2 命题 5.2 的证明

例 5.7 假设某个消费者偏好关系可以用效用函数 $x_1 x_2$ 表示(无差异曲线如图 5.3 所示)。任意一个满足 $x_1 > 0$ 且 $x_2 > 0$ 的商品组合 (x_1, x_2) 的偏好程度一定高于 $x_1 = 0$ 或 $x_2 = 0$ 时的商品组合, 所以, 如果 x^* 是消费者问题的解, 一定有 $x_1^* > 0$ 且 $x_2^* > 0$ 。此偏好关系是单调、凸性且可微的, 所以, 由命题 5.2 可知

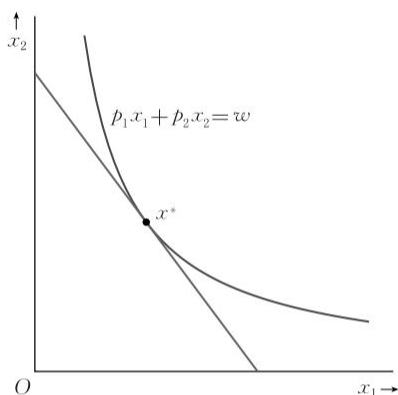
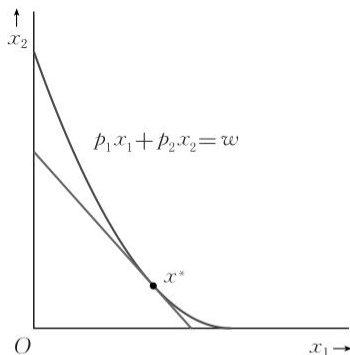


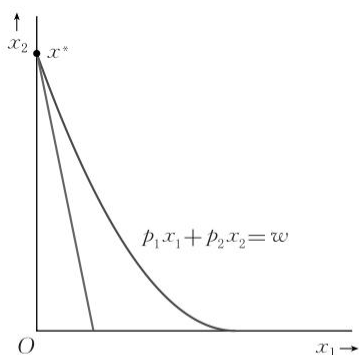
图 5.3 例 5.7 中偏好关系的无差异集合

$MRS(x^*) = p_1/p_2$ 。由命题 4.4 可得, $MRS(x^*)$ 是效用函数在 x^* 这个点上的偏导数之比, 即 $MRS(x^*) = x_2^*/x_1^*$ 。因此有 $x_2^*/x_1^* = p_1/p_2$, 即 $p_1x_1^* = p_2x_2^*$ 。由于此偏好关系是单调的, 由命题 5.1(3) 可知, x^* 在预算约束线上: $p_1x_1^* + p_2x_2^* = w$ 。所以, $(x_1^*, x_2^*) = (w/(2p_1), w/(2p_2))$, 这意味着消费者会等分其财富, 分别购买两种商品。

例 5.8 假设某消费者的偏好关系可以用效用函数 $(x_1 + \sqrt{x_2})$ 表示。这个偏好关系是单调、凸性且可微的, 所以由命题 5.1(3) 可知, 消费者问题的解位于预算约束线上, 且满足命题 5.2 所需的条件。由于 $MRS(x_1, x_2) = 2\sqrt{x_2}$, 所以, 在预算约束线上, 随着 x_1 增长, x_2 减少, $MRS(x_1, x_2)$ 从 $2\sqrt{w/p_2}$ 下降到 0 (如图 5.4 所示)。因此, 如果 $2\sqrt{w/p_2} \geq p_1/p_2$, 消费者问题有唯一的解 (x_1^*, x_2^*) , 它满足 $MRS(x_1^*, x_2^*) = 2\sqrt{x_2^*} = p_1/p_2$ 或满足 $x_2^* = p_1^2/(4p_2^2)$ 且 $x_1^* = w/p_1 - p_1/(4p_2)$; 如果 $2\sqrt{w/p_2} \leq p_1/p_2$, 可得 $(x_1^*, x_2^*) = (0, w/p_2)$, 此时消费者花掉全部的财富购买第二种商品。



(a) 消费者问题的解 x_1^* 满足 $x_1^* > 0$, 且 $MRS(x_1^*, x_2^*) = p_1/p_2$ 。



(b) 消费者问题的解 x_1^* 满足 $x_1^* = 0$, 且 $MRS(x_1^*, x_2^*) > p_1/p_2$ 。

图 5.4 例 5.8 消费者问题的解

5.5 需求函数的理性化

前两节中, 我们讨论了需求函数, 需求函数由消费者最大化其偏好关系得出来。在本节我们将讨论, 由其他方式得出的需求函数是否与消费者最大化其偏好关系的行为一致。也就是说, 我们不是从偏好关系出发推导出需求函数, 而是反其道而行之: 对于某个给定的需求函数, 我们考察是否存在一个单调的偏好关系使得

消费者问题的解与这个需求函数一致。或者,简单来说,看看哪些需求函数可以用某些偏好关系合理解释。

定义 5.5: 理性化的需求函数

如果存在一个单调的偏好关系,使得对于每个预算集,需求函数给出的选项恰好是消费者问题的解,那么这个需求函数就是理性化的。

请注意,这个定义不要求需求函数给出的选项是消费者问题唯一的解。

在 2.3 节中,我们证明了当且仅当选择函数满足性质 α 时,这个选择函数才是理性化的(命题 2.1 和命题 2.2)。这个结论无法应用于消费者的需求函数,因为性质 α 在这里是无意义的:如果商品组合 a 从预算集 B 中选出,且位于 B 的预算约束线上,那么不存在一个预算集既包括商品组合 a ,又是 B 的子集。

我们下面给出几个需求函数的例子,并找出可以理性化这些需求函数的偏好关系。

例 5.9: 用所有的财富购买更便宜的商品

此时的需求函数如例 5.1 所示。也就是说,如果商品价格不同,消费者用所有的财富购买相对更便宜的商品;如果商品价格相同,消费者将财富等分,分别用以购买这两种商品。偏好关系 $(x_1 + x_2)$ 、 $\max\{x_1, x_2\}$ 、 $(x_1^2 + x_2^2)$ 都可以理性化这个需求函数。

例 5.10: 花等量的财富购买每种商品

此时的需求函数如例 5.3 所示。也就是说,消费者将财富等分,分别购买每种商品,而不管商品价格和财富是多少。根据偏好关系 $x_1 x_2$ (见例 5.7),需求函数是理性化的。因此,尽管求商品数量乘积的最大值看起来有些奇怪,但这个函数可以理性化这个需求函数。

例 5.11: 用所有的财富购买更贵的商品

消费者用所有的财富购买相对更贵的商品;如果商品价格相同,他只购买商品 1。也就是说,如果 $p_1 \geq p_2$,则 $x((p_1, p_2), w) = (w/p_1, 0)$;如果 $p_1 < p_2$,则 $x((p_1, p_2), w) = (0, w/p_2)$ 。这个需求函数无法被某个单调的偏好关系理性化。这个消费者会从 $B((1, 2), 2)$ 中选择 a ,会从 $B((2, 1), 2)$ 中选择 b (如图 5.5 所示)。由于 b 也在预算集 $B((1, 2), 2)$ 内,依据单调的可以理性化需求函数的偏好关系 $\geq$,有 $a \succ b$ (否则,他不会选择 a)。同理,由于 a 也在预算集 $B((2, 1), 2)$ 内,可得 $b \succ a$,这与 $a \succ b$ 矛盾。

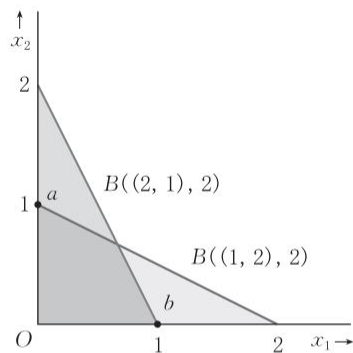


图 5.5 例 5.11 中需求函数的图示。浅灰色三角形是预算集 $B((1, 2), 2)$, 深灰色三角形是预算集 $B((2, 1), 2)$ 。

最后一个例子的需求函数适用于以下两种情况:商品价格代表商品的质量;消费者喜欢消费更贵的商品所带来的优越感。这个例子凸显了消费者行为模型中两

个隐含的假设:价格并不传递有关商品质量的信息;个人偏好不受商品价格和个人的财富的影响。

显示偏好弱公理

如果一个人在可以选 b 的情况下选了 a , 我们可以得出结论—— a 至少和 b 一样好。如果一个人可以选 b , 且选 b 的花费比选 a 少, 但他选择了 a , 我们可以得出类似的结论——如果两种商品对于他来说都是有益的, 那么相对于 b 他更偏好 a [如图 5.6(a) 所示]。比如, 如果这个人在可以选择商品组合 $(0, 2)$ 的情况下选择了 $(2, 0)$, 那么我们可以得出结论——他认为 $(2, 0)$ 至少和 $(0, 2)$ 一样好; 而且, 相对于 $(0, 1.9)$, 他更偏好 $(2, 0)$ 。

定义 5.6: 显示性偏好

给定需求函数 x , 对于某些价格 (p_1, p_2) 和财富 w , 如果预算集 $B((p_1, p_2), w)$ 既包括 a 又包括 b , 而消费者选择了 a , 即 $x((p_1, p_2), w) = a$, 那么这个选择揭示了消费者的偏好关系: 商品组合 a 至少和商品组合 b 一样好。对某些价格 (p_1, p_2) 和财富 w , 如果预算集 $B((p_1, p_2), w)$ 既包括 a 又包括 b , 且 $p_1 b_1 + p_2 b_2 < w$, 而 $x((p_1, p_2), w) = a$, 那么这个选择揭示了消费者的偏好关系: 商品组合 a 优于商品组合 b 。

下面我们讨论一个性质, 每个可以被单调的偏好关系理性化的需求函数都满足这个性质。

定义 5.7: 显示偏好弱公理

如果不存在这样的商品组合 a 和 b : 一些选择表明 a 至少和 b 一样好, 而另外一些选择表明 b 优于 a , 那么可以说这个需求函数满足显示偏好弱公理 (Weak axiom of revealed preference, WARP)。

命题 5.3: 理性消费者的需求函数满足显示偏好弱公理

一个能被单调的偏好关系理性化的需求函数满足显示偏好弱公理。

证明: 设 x 是可以被单调的偏好关系 $\succsim$ 理性化的需求函数。假设与命题 5.3 的结论相反: (1) 一些选择表明 a 至少和 b 一样好; (2) 另外一些选择表明 b 优于 a 。由 (1) 可知 $a \succsim b$ 。由 (2) 可知, 存在价格 p_1, p_2 和财富 w , 使得 $b = x((p_1, p_2), w)$ 且 $p_1 a_1 + p_2 a_2 < w$ 。设 c 是集合 $B((p_1, p_2), w)$ 中的一个商品组合, 且 $c_1 > a_1, c_2 > a_2$ [如图 5.6(b) 所示]。由偏好关系的单调性可得 $c \succ a$ 。由于 b 从 $B((p_1, p_2), w)$ 中选出, 可得 $b \succsim c$ 。偏好关系是可传递的, 可得 $b \succ a$, 与 $a \succsim b$ 矛盾。

命题 2.1 和命题 2.2 表明, 对一般的选择问题, 当且仅当选择函数满足性质 α 时, 这个选择函数才是理性化的。相比之下, 命题 5.3 仅讨论了需求函数可以被单调的偏好关系理性化的必要条件, 并没有提及充分条件。本书不讨论充分条件, 即显示偏好强公理。

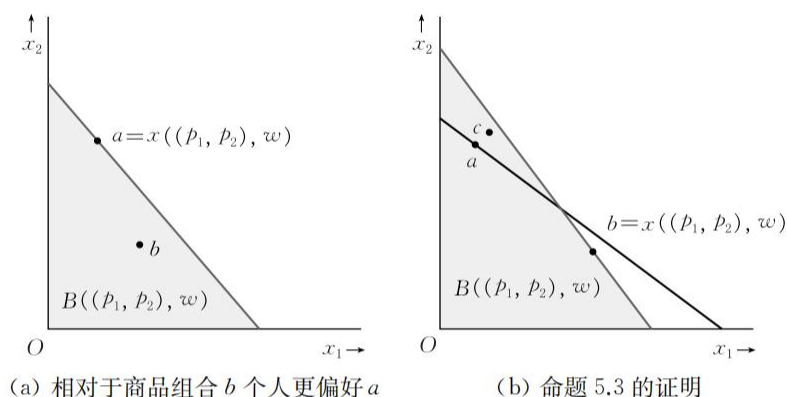


图 5.6 用反证法证明命题 5.3

5.6 需求函数的性质

需求函数描述了消费者所选择的商品组合如何随着商品价格和消费者财富的变化而变化。如果给定商品 2 的价格和消费者的财富,需求函数描述的是消费者所选择的商品组合将如何随商品 1 的价格的变化而变化。在给定商品 1 的价格和消费者的财富的情况下,商品 1 的价格与其需求量之间的关系被称为消费者对商品 1 的常规(regular)需求函数或者马歇尔需求函数。在给定商品 1 的价格和消费者的财富的情况下,商品 1 的价格与商品 2 的需求量之间的关系被称为消费者对商品 2 的交叉需求函数。在给定商品价格的情况下,消费者的财富与对商品 i 的需求量之间的关系,被称为消费者对商品 i 的恩格尔函数。

定义 5.8: 常规需求函数、交叉需求函数和恩格尔函数

设 x 是消费者的需求函数。

- 给定商品 2 的价格 p_2^0 和财富 w^0 , 函数 x_1^* 定义为 $x_1^*(p_1) = x_1((p_1, p_2^0), w^0)$, 是给定 (p_2^0, w^0) 时消费者对商品 1 的常规需求函数或马歇尔需求函数; $\hat{x}_2$ 定义为 $\hat{x}_2(p_1) = x_2((p_1, p_2^0), w^0)$, 是给定 (p_2^0, w^0) 时消费者对商品 2 的交叉需求函数。
- 给定价格 (p_1^0, p_2^0) , 函数 $\bar{x}_k$ 可以定义为 $\bar{x}_k(w) = x_k((p_1^0, p_2^0), w)$, 是给定两种商品价格 (p_1^0, p_2^0) 时消费者对商品 k 的恩格尔函数。

举个例子, 消费者用一部分财富 w (占比为 α) 购买商品 1, 用剩余财富购买商品 2, 因此 $x((p_1, p_2), w) = (\alpha w/p_1, (1-\alpha)w/p_2)$ 。给定 p_2^0 和 w^0 时, 消费者对商品 1 的常规需求函数为 $x_1^*(p_1) = \alpha w^0/p_1$ (注意: 它与 p_2^0 无关); 给定 p_2^0 和 w^0 时, 消费者对商品 2 的交叉需求函数是常数 $\hat{x}_2(p_1) = (1-\alpha)w^0/p_2^0$; 给定价格 (p_1^0, p_2^0) 时, 消费者对商品 1 的恩格尔函数为线性函数 $\bar{x}_1(w) = \alpha w/p_1^0$ 。

在介绍需求函数的性质之前, 我们先来看几个术语。

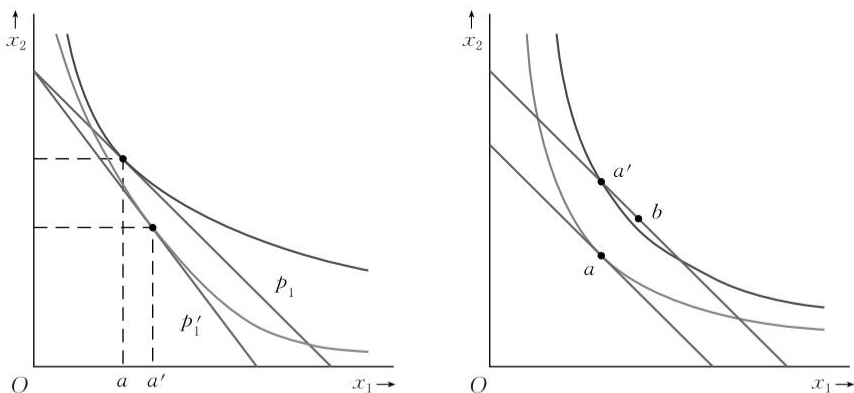
* 原书有误, 误写为“1”。——译者注

定义 5.9: 正常商品、常规商品和吉芬商品

如果给定商品价格, 消费者的恩格尔函数是递增的, 那么这个商品对该消费者来说是正常商品(normal goods)。如果给定另一种商品的价格和财富水平, 消费者对某商品的常规需求函数是递减的, 那么这个商品对消费者来说是常规商品(regular goods); 如果给定另一种商品的价格和财富水平, 消费者对某商品的常规需求函数是递增的, 那么这个商品对消费者来说是吉芬商品。

这些术语可以应用于局部区域: 比如, 如果给定 p_2^0 和 w^0 , 需求函数在 p_1^0 这个点是递增的(但不一定在 p_1 取所有值时都是递增的), 那么商品 1 在点 $((p_1^0, p_2^0), w^0)$ 是吉芬商品。

我们通常假设每种商品都是常规商品: 给定另一种商品的价格和消费者的财富, 随着商品价格的上涨, 消费者对该商品的需求量会下降。但是, 如果理性消费者的偏好关系满足单调性、连续性、凸性和可微的标准假设, 其需求函数不一定具有此性质。我们不举具体的例子来说明这一点, 但从图 5.7(a) 中可以直观看出: 给定商品 2 的价格和消费者的财富, 随着商品 1 的价格从 p_1 增加到 p_1' , 消费者对商品 1 的需求量从 a 上升到 a' 。



(a) 随着商品 1 价格上涨, 商品 1 的需求增加

(b) 命题 5.4 的证明

图 5.7 吉芬商品和正常商品

以下命题告诉我们, 满足什么条件的偏好关系可以保证相应的商品是正常商品。

命题 5.4: 边际替代率和正常商品

对于一个理性消费者, 如果在 x_1 取所有值的时候边际替代率 $MRS(x_1, x_2)$ 都随着 x_2 的上升而上升, 那么这个消费者的需求函数具有如下性质——商品 1 是正常商品(消费者对该商品的恩格尔函数是递增的)。

证明: 给定 p_1^0 和 p_2^0 , 令 $w' > w$ 。预算集为 $B((p_1^0, p_2^0), w)$ 时, a 是消费者问题的解, a' 位于 $B((p_1^0, p_2^0), w')$ 的边界上, 且 $a'_1 = a_1$ [如图 5.7(b) 所示]。根据边际替代率的假设, 有 $MRS(a') > MRS(a)$ 。因此, 预算集为 $B((p_1^0, p_2^0), w')$ 时消费者问题的解 b 满足 $b_1 > a'_1 = a_1$ 。

在本节, 我们比较了在参数取两组不同的值时, 消费者的选择。这样的分析称

为比较静态分析。静态一词的含义是：只比较参数变化前后消费者决策的结果的变化，而不涉及对变化路径或过程的分析；我们只是简单地将一个结果与另一个结果进行比较。比如，常规需求函数的性质可以被视为回答这样一个比较静态问题：参数（价格和财富）变化以后消费者行为会有何不同。只不过，此时我们不假设所有的参数都变化，而是假设某个商品的价格不变。有些时候，人们在面对一个新的预算集时的决策，会受到他们以前面对旧预算集时的决策的影响，但本章不讨论这种情形。

以下内容就属于比较静态分析，研究的是需求函数满足显示偏好弱公理且在预算约束线上选择商品组合的消费者的行为。它考察的是商品价格变化所产生的效应：商品价格发生变化后，消费者调整其财富的数量，以使新的财富刚好足够购买商品价格变化之前他所选择的商品组合。命题 5.5 讨论了商品价格变化且财富如此调整所带来的影响。结果表明，如果商品 1 的价格上涨后以这种方式调整消费者的财富，消费者购买商品 1 的数量就会减少。

命题 5.5: 斯勒茨基性质

假设理性消费者的需求函数是单值 (single-valued) 函数且满足显示偏好弱公理，而且，对所有 $((p_1, p_2), w)$ 都有 $p_1 x_1((p_1, p_2), w) + p_2 x_2((p_1, p_2), w) = w$ 。令 $p'_1 > p_1$ ，且价格为 (p'_1, p_2) 时购买商品组合 $x((p_1, p_2), w)$ 所需的花费为 w' ，即 $w' = p'_1 x_1((p_1, p_2), w) + p_2 x_2((p_1, p_2), w)$ 。那么，有 $x_1((p'_1, p_2), w') \leq x_1((p_1, p_2), w)$ 。

证明：设 $a = x((p_1, p_2), w)$ 、 $b = x((p'_1, p_2), w')$ (如图 5.8 所示)。从图中可以看到， a 在预算集 $B((p'_1, p_2), w')$ 内，因此 b 显示偏好于 a (至少与 a 一样好)。当价格为 p'_1 时，预算约束线的斜率大于价格为 p_1 时预算约束线的斜率。因此，如果 $b_1 > a_1$ ，则 b 也在预算集 $B((p_1, p_2), w)$ 内，而 $a = x((p_1, p_2), w)$ 且 b 在 $B((p_1, p_2), w)$ 内则意味着 a 显示偏好于 b 。这个结论与“需求函数满足显示偏好弱公理”的这个假设矛盾。

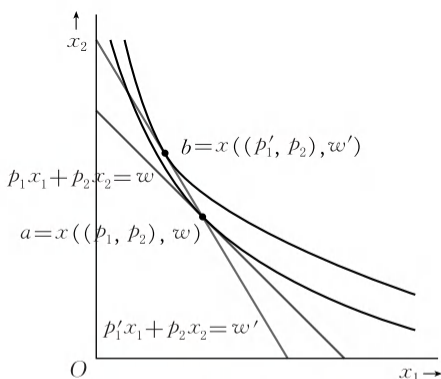


图 5.8 命题 5.5 的证明

课后习题

1. 词典式偏好。如果一个理性的消费者有词典式偏好（首先关注商品 1），试求出其需求函数。
2. 柯布-道格拉斯需求。消费者的偏好关系可以用效用函数 $x_1^\alpha x_2^{1-\alpha}$ 表示，其中 $0 < \alpha < 1$ 。这些偏好关系是凸性且可微的。请证明：对任意商品价格和财富，消费者都会将财富的一定比例 (α) 用于购买商品 1。

3. 需求函数的理性化 I。存在一个需求函数, 消费者用所有的财富购买两种商品, 所购买的商品 1 和商品 2 的数量之比为 p_2/p_1 。请证明, 用效用函数 $(\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2})$ 表示的偏好关系可以理性化这个需求函数。
4. 需求函数的理性化 II。预算约束线和穿过原点且与预算约束线边界垂直的射线相交, 如果消费者选择这个交点上的商品组合。需求函数可以被一个单调的偏好关系理性化吗?
5. 支出函数。消费者偏好关系是单调、连续且凸的。设 $x^* = (x_1^*, x_2^*)$ 是一个商品组合。对任意价格 (p_1, p_2) , 设 $e((p_1, p_2), x^*)$ 是使消费者能够购买至少和 x^* 一样好的商品组合所需的最低财富数量(如图 5.9 所示):

$$e((p_1, p_2), x^*) = \min_{(x_1, x_2)} \{p_1 x_1 + p_2 x_2 : (x_1, x_2) \succcurlyeq (x_1^*, x_2^*)\}$$

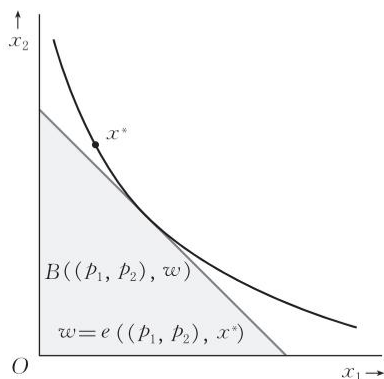


图 5.9 预算集 $B((p_1, p_2), e((p_1, p_2), x^*))$

- (1) 请证明: 函数 e 是 p_1 (和 p_2) 的增函数。
- (2) 请证明: 对所有 $\lambda > 0$ 和价格 (p_1, p_2) , 都有 $e((\lambda p_1, \lambda p_2), x^*) = \lambda e((p_1, p_2), x^*)$ 。
6. 需求函数的理性化。如果购买 10 单位的商品 1 的花费不足 $\frac{1}{2}w$, 则消费者会购买 10 单位的商品 1, 然后用剩余的财富全部购买商品 2。如果购买 10 单位商品 1 的花费大于等于 $\frac{1}{2}w$, 则消费者将财富等分, 分别购买每种商品。请证明, 用下述效用函数 $u(x_1, x_2)$ 表示的偏好关系可以说明这个行为是理性的:

$$u(x_1, x_2) = \begin{cases} x_1 x_2, & \text{如果 } x_1 \leq 10 \\ 10 x_2, & \text{如果 } x_1 > 10 \end{cases}$$

7. 累加的消费者效用函数。假设有两种商品: 食物(z)和金钱(m)。消费者的偏好关系可以由效用函数 $[m + v(z)]$ 表示, v 是递增的、凸的且有连续导数的。一单位食物的价格可以用金钱表示为 α 。消费者最初有 M 单位的金钱, 0 单位的

食物。

(1) 求出消费者问题的解。

(2) 如果消费者的两个预算集中只有食物的价格不同,比较两种情况下消费者对食物的消费。请证明,食物价格为 β 时消费者购买的食物数量,不多于食物价格为 α 时购买的食物数量($\alpha < \beta$)。

8. 时间偏好 I。一个消费者选择在两个不同日期的消费数量,他可以通过借贷将消费从一个日期转移到另一个日期。我们可以将日期 1 的消费和日期 2 的消费视为本章研究的模型中的两种不同的商品。

设消费者在日期 1 和日期 2 各有 y 单位的金钱,借贷利率都为 $r > 0$,所以 he 可以用日期 1 的 1 单位金钱交换日期 2 的 $(1+r)$ 单位金钱。此时,消费者的预算集为:

$$\{(x_1, x_2) \in X: (1+r)x_1 + x_2 \leq (1+r)y + y\}$$

消费者的需求函数可以表示为 $x(r, y)$ 。假设(1) x 满足显示偏好弱公理;(2)对任意一个商品组合 (r, y) ,消费者都选择位于预算约束线 $\{(x_1, x_2) \in X: (1+r)x_1 + x_2 = (1+r)y + y\}$ 上的商品组合;(3)在每一个日期消费的商品都是正常商品。

(1) 请证明:如果利率为 r_1 时消费者选择借入金钱,那么当利率为 $r_2 > r_1$ 时消费者会减少借入金钱的数量(甚至可能会选择储蓄)。

(2) 请证明:如果利率为 r_1 时消费者选择借出金钱,那么当利率为 $r_2 > r_1$ 时消费者不会借入金钱。

9. 时间偏好 II。与第 8 题的模型一样,假设消费者有单调、连续、凸且可微的偏好关系 $\succsim$ 。

(1) 如果对所有 s 和 t 有 $(s, t) \sim (t, s)$ (也就是说,对任意数量的消费 s 和 t ,消费者认为在日期 1 消费 s 单位且在日期 2 消费 t 单位与在日期 1 消费 t 单位且在日期 2 消费 s 单位是无差异的),那么我们称此偏好关系是时间中性的(time neutral)。请证明, t 取任意值时都有 $MRS(t, t) = 1$ 。

(2) 如果当 $t > s$ 时,我们有 $(t, s) \succ (s, t)$,则称此偏好关系更看重当期。请证明:在这种情况下 t 取任意值都有 $MRS(t, t) \geq 1$ 。

(3) 请仅用更看重当期的偏好这个假设来证明:如果 $r \leq 0$,消费者问题的解对应的在日期 1 的消费数量至少和在日期 2 的消费数量一样多。

本章说明

吉芬商品是 Marshall(1895:208)以 Robert Giffen 的名字命名的。恩格尔函数是以 Ernst Engel 的名字命名的。斯勒茨基性质由 Slutsky(1915)提出。显示偏好理论由 Samuelson(1938)提出。对本章的论述借鉴了 Rubinstein(2006a, Lecture 5)。

▶ 6

生产者行为

我们建议你先回答下面这个问题,并将在本章的最后再来讨论这个问题。

假设你是一家快递公司的副总裁。该公司成立于五年前,且为三个家族所拥有,除管理层外共雇佣了 196 名员工。

员工的工作不需要什么特殊的技能,每名员工入职前要接受为期一周的培训。所有员工都已经在该公司工作了三年至五年不等的时间。公司支付给员工高于最低工资标准的薪酬,且提供法律所规定的各种福利。一直到去年,该公司盈利情况一直非常好。由于今年经济衰退,公司的利润大幅下降,但仍在盈利。

设想下你正在参加管理层会议,来决定是否要解雇一些工人。公司财务部编制了如下的年度利润预测表。

继续雇佣的员工数 (人)	预计年利润 (万美元)
0(所有员工均被解雇)	损失 800
50(146 名员工被解雇)	盈利 100
65(131 名员工被解雇)	盈利 150
100(96 名员工被解雇)	盈利 200
144(52 名员工被解雇)	盈利 160
170(26 名员工被解雇)	盈利 100
196(无员工被解雇)	盈利 40

你会决定继续雇佣多少名员工?

6.1 生产者

生产者和消费者在经济模型中扮演着核心角色。消费者可以购买商品,从而改变商品在经济主体之间的分配;生产者可以改变商品的可获得性,将投入转

化为产出(投入可以是实物,如原材料,也可以是非实物的资源,如信息和注意力)。

在我们研究的模型中,生产者的特征包括两个方面:(1)技术,描述生产者将投入转化为产出的能力;(2)动机(motive),指导生产者决定投入和产出数量。许多生产者不是个体,而是像集体、家庭或公司一样的组织。这类组织通常有等级结构和集体决策机制,在我们所研究的模型中不考虑这些机制如何影响生产决策。

我们先来研究一个简单的模型,在这个模型中,生产者可以将一个商品(投入)转化成另一个商品(产出)。模型中的函数 f 表示生产者所掌握的技术,生产函数 $f(a)=y$ 表示投入 a 单位能得到 y 单位的产出。我们假设:如果产出大于 0,投入也要大于 0,而 $f(0)=0$;如果投入数量增加,则产出不变或增加(f 是非递减的)。我们还进一步假设:投入数量较多时增加一单位投入对产出的影响不大于投入数量较少时增加一单位投入对产出的影响(f 为凹函数);投入量趋于无穷大时,增加一单位投入对产出的影响趋近于零。

定义 6.1:生产函数

生产函数 f 为 $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$,给出了投入品数量与产出数量的对应关系。 f 是连续、非递减的凹函数,且满足: $f(0)=0$;对任意 $\epsilon > 0$,存在一个数 y 使得 $f(y+1)-f(y) < \epsilon$ 。

我们假设生产者必须在给定的价格水平上购买投入品和销售产出品。在本章中,我们假设生产者认为他的行为不会影响这些价格。也就是说,像之前章节中的消费者一样,生产者是价格接受者。这个假设适用于生产者的投入量和产出量与市场中的总量相比都很小的情况,在这种情况下,生产者的行为对商品(投入品或产出品)总量的影响很小,对商品价格的影响不显著。如果生产者投入量与产出量在市场中所占份额较大,那么其行为会影响市场价格,这个假设就不再成立。我们将在第 7 章研究这类生产者。

p 表示产出品价格, w 表示投入品价格。如果生产者投入 a 单位可得 y 单位产出,则其收入为 py ,利润为 $\pi = py - wa$ 。我们假设生产者对 (a, y, π) 有偏好,也就是说,他可能关心投入品数量、产出品数量和利润的数量。以下是他的偏好的几种可能的形式。

(1) 产出最大化。

如果(1) $y > y'$ 且 $\pi \geq 0$,或(2) $\pi \geq 0$ 且 $\pi' < 0$,则生产者相对于 (a', y', π') 更偏好 (a, y, π) 。也就是说,在利润非负的前提下,生产者选择 (a, y) 以最大化产出品数量。生产者之所以偏好非负的利润,可能是因为他一旦亏损就难以生存了。

(2) 利润最大化。

当且仅当 $\pi > \pi'$ 时,生产者相对于 (a', y', π') 更偏好 (a, y, π) 。也就是说,生产者选择 (a, y) 以使利润最大化。

(3) 有产出下限的利润最大化。

对于某一给定的产出 $\bar{y}$, 如果(1) $\pi > \pi'$ 且 $y \geq \bar{y}$, 或者(2) $y \geq \bar{y}$ 且 $y' < \bar{y}$, 则生产者相对于 (a', y', π') 更偏好 (a, y, π) 。也就是说, 在产出至少为 $\bar{y}$ 的前提下, 生产者选择 (a, y) 以使利润最大化。如果 $\bar{y}$ 很小, 则这个产出下限没什么约束力。但如果 $\bar{y}$ 很大, 则会限制投入量, 使其最低值为 $\bar{a}$ ($f(\bar{a}) = \bar{y}$)。

(4) 合伙企业。

假设生产者是一个组织, 它决定其成员数量的多少, 并在成员之间平均分配利润。它不雇佣非成员以外的员工。每个成员贡献一单位劳动, 因此投入品的数量 a 就等于合伙企业的成员的数量。合伙企业的目标是实现每个成员的利润 (π/a) 的最大化。

在本章, 我们只探讨上述偏好中的前两种, 即产出最大化和利润最大化。

6.2 产出最大化

首先, 我们研究在不亏损的前提下追求产出最大化的生产者。

定义 6.2: 追求产出最大化的生产者

给定产出品价格 p 和投入品价格 w , 追求产出最大化的生产者的生产函数为 f , 他选择投入量 a 以解决如下的生产者问题:

$$\max_a f(a) \quad \text{s.t.} \quad pf(a) - wa \geq 0$$

图 6.1(a) 展示了这种生产者的决策问题。生产者的利润由标记为 $pf(a)$ 的黑色曲线和标记为 wa 的直线之间的差值给出。除了我们已对生产函数 f 所作的假设外, 如果还假设生产函数是严格凹函数, 那么, 要么所有正值 a 所对应的利润都是负数, 要么存在唯一的正数 a^* 使得 $pf(a^*) - wa^* = 0$ 。[图 6.1(a) 描述的是第二种情况。]

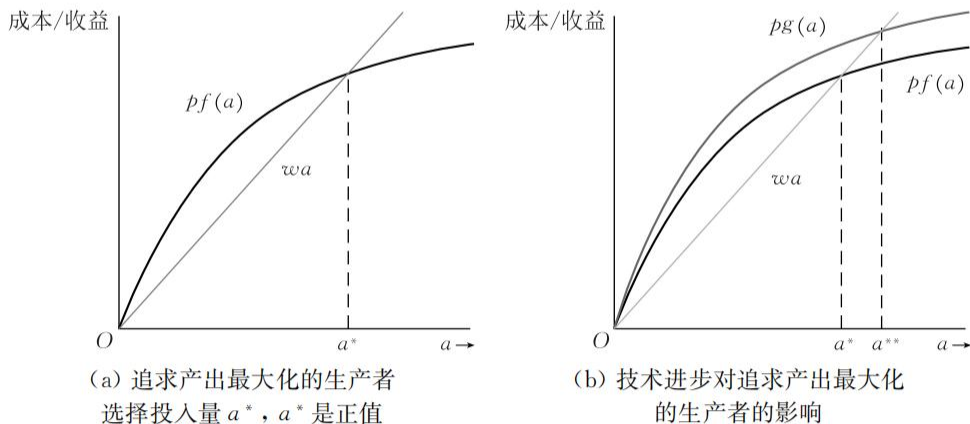


图 6.1 追求产出最大化的生产者

命题 6.1: 产出最大化生产者的最优投入

如果生产函数 f 是严格凹函数, 追求产出最大化的生产者的生产函数为 f , 投入品价格为 w 且产出品价格为 p , 那么这个生产者选择的投入量为:

$$\begin{cases} 0, & \text{如果对于所有 } a > 0 \text{ 有 } pf(a) - wa < 0 \\ a^*, & \text{否则} \end{cases}$$

其中, a^* 是 $pf(a^*) - wa^* = 0$ 的唯一的正数解。

利用图 6.1(a)(价格变化)和图 6.1(b)(技术变化)可以分析投入价格或产出价格变化以及技术变化对生产者的最优决策的影响。

命题 6.2: 追求产出最大化的生产者的比较静态分析

如果生产函数 f 是严格凹函数, 那么投入品价格下降、产出品价格上升和技术进步(生产函数从 f 变为 g , 对所有 a 都有 $g(a) \geq f(a)$), 这些变化都将使生产函数为 f 的追求产出最大化的生产者决定的投入量(和产出量)增加或保持不变。

6.3 利润最大化

相对于假设生产者追求产出最大化, 假设生产者追求利润最大化更为普遍。

定义 6.3: 追求利润最大化的生产者

给定产出品价格 p 、投入品价格 w 和生产函数为 f , 追求利润最大化的生产者选择最优投入量以解决如下生产者问题:

$$\max_a [pf(a) - wa]$$

图 6.2(a)描述了追求利润最大化的生产者的决策问题。如果生产函数是可微且是严格凹的, 则生产者的决策问题的解具有如下特征。

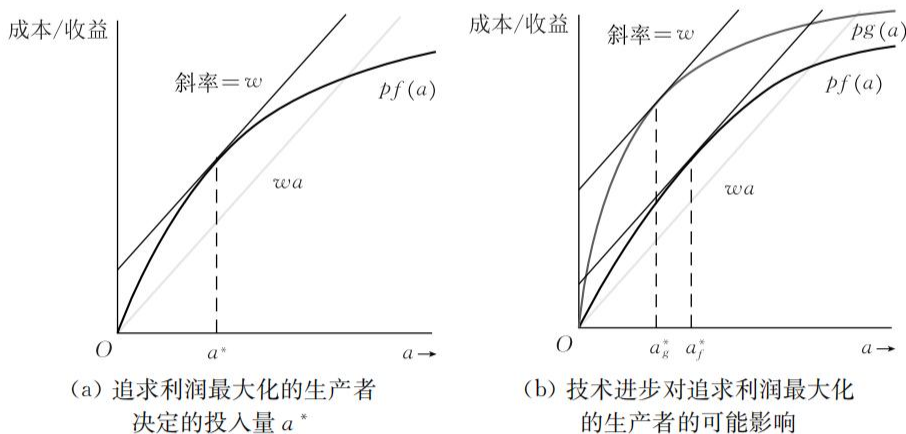


图 6.2 追求利润最大化的生产者

命题 6.3: 追求利润最大化的生产者的最优投入量

如果追求利润最大化的生产者的生产函数 f 可微且是严格凹的, 投入价格为 w 且产出价格为 p , 那么, 这个生产者所选择的投入量为:

$$\begin{cases} 0, & \text{如果对所有 } a > 0 \text{ 有 } pf(a) - wa < 0 \\ a^*, & \text{否则} \end{cases}$$

其中, a^* 是 $pf'(a^*) - w = 0$ 的唯一的正数解。

证明: 当生产者确定的投入量为 a 时, 其利润为 $(pf(a) - wa)$ 。给定 f 是严格凹函数, 故 $(pf(a) - wa)$ 也是严格凹函数。用可微函数求最大值的标准方法可得命题 6.3 的结论。

如果投入品或产出的价格发生改变, 追求利润最大化的生产者会改变其投入品数量, 变动的方向与生产者追求产出最大化时的变动方向一样。

命题 6.4: 追求利润最大化的生产者的比较静态分析

当投入品价格上升或产出品价格下降时, 追求利润最大化的生产者会降低投入品数量或保持其不变。

证明: $\alpha(w)$ 表示投入品价格为 w 时生产者确定的投入量。根据定义, 对于所有的 a 都有:

$$pf(\alpha(w)) - w\alpha(w) \geq pf(a) - wa$$

移项可得:

$$p[f(\alpha(w)) - f(a)] \geq w[\alpha(w) - a]$$

具体来看, 当投入价格为 w^1 和 w^2 时:

$$p[f(\alpha(w^1)) - f(\alpha(w^2))] \geq w^1[\alpha(w^1) - \alpha(w^2)]$$

以及

$$p[f(\alpha(w^2)) - f(\alpha(w^1))] \geq w^2[\alpha(w^2) - \alpha(w^1)]$$

将这两个不等式相加可得:

$$0 \geq (w^1 - w^2)(\alpha(w^1) - \alpha(w^2))$$

因此, 如果 $w^1 < w^2$, 则有 $\alpha(w^1) \geq \alpha(w^2)$ 。同理可证产出价格 p 的变化对投入量的影响。

请注意, 这个证明没有用到生产函数的任何性质, 因此, 命题 6.4 的结论与生产函数是否是凹函数无关。

如果生产函数是可微的, 我们可以在命题 6.3 的基础上换种方式证明命题 6.4。如果 $pf'(0) < w$, 那么当 w 上升后, 不等式仍然成立, 此时的最优投入量及产量仍为 0。如果 $pf'(0) \geq w$, 那么当 w 上升后, 等式 $pf'(a) = w$ 的解不会变大, 这是因为 f 是凹函数。

如图 6.2(b) 的例子所示, 与追求产出最大化的生产者不同, 在有技术进步的情况下, 追求利润最大化的生产者可能会减少产出。但是, 容易证明, 如果生产函数是可微的, 且技术进步使生产函数从 f 变成 g , 从而使 $g'(a) \geq f'(a)$ 在 a 取任何值的时候都成立, 那么追求利润最大化的生产者也会提高投入数量和产出数量。

6.4 成本函数

给定生产函数, 我们能够找到生产任意数量的产品所需要的成本。具体来说, 当生产函数是 f 时, 生产 y 单位产出的成本是 $wf^{-1}(y)$ 。有时把成本函数作为模型的初始条件比较方便, 而不从生产函数中推导出成本函数。也就是说, 设定模型时我们定义一个函数 C , C 告诉我们生产出数量为 y 的产品所需要的成本为 $C(y)$ 。如果我们只对产品市场感兴趣, 这样设定模型更恰当。

我们假设 $C(0)=0$, 这合乎常理。此外, 我们还假设生产 y 单位的平均成本 $C(y)/y$ 最终会超过任何给定的上限。一些成本函数 C 具有如下形式: $C(y) = k + c(y)$, 其中, $y > 0$, $k > 0$, c 是一个递增函数且 $c(0)=0$ 。在此情况下, 我们称 k 为生产的固定成本, $c(y)$ 为可变成本。

定义 6.4: 成本函数

成本函数是递增函数 $C: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, $C(0)=0$, 对于所有的 $K > 0$ 都存在一个 (很大的) 数 y 使得 $C(y)/y > K$ 。如果此函数具有如下形式:

$$C(y) = \begin{cases} 0, & \text{如果 } y=0 \\ k+c(y), & \text{如果 } y>0 \end{cases}$$

其中 $c: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ 是递增函数, 且 $c(0)=0$, k 为正数, 那么 C 可以被称为固定成本为 k 且可变成本为 c 的成本函数。

函数 $AC(y) = C(y)/y (y > 0)$ 是 C 的平均成本函数; 如果 C 对 y 可导, 那么 $MC(y) = C'(y)$ 是产量为 y 时的边际成本函数。

有固定成本和无固定成本的成本函数如图 6.3(a) 和图 6.3(b) 所示。平均成本和边际成本函数如图 6.4(a) 和图 6.4(b) 所示。

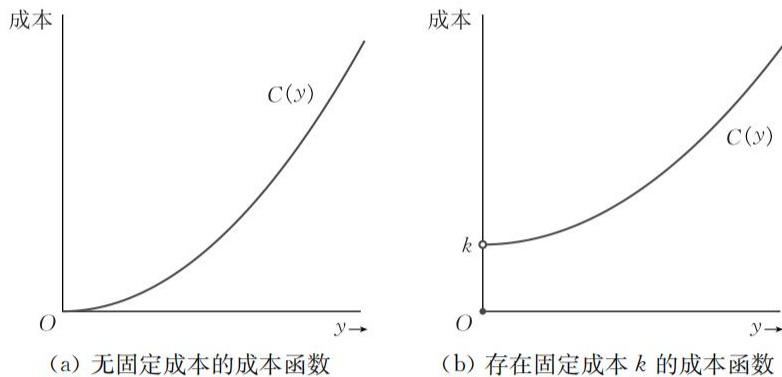


图 6.3 成本函数

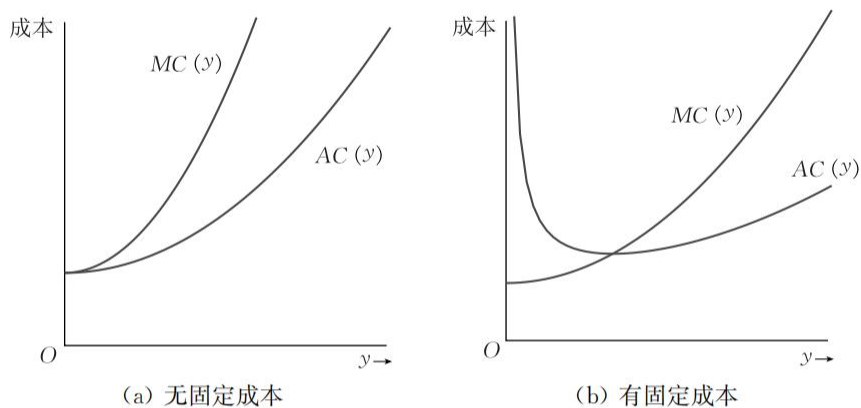


图 6.4 平均成本函数和边际成本函数

请注意,如果像我们之前假设的那样,产出是用一种投入品生产出来的,且生产函数是 f ,那么无固定成本的成本函数就是 $C(y) = wf^{-1}(y)$ (f 是增函数,所以 C 也是增函数)。给定 f 是凹函数,所以 C 也是凸函数。

平均成本函数和边际成本函数的以下几个性质有时很有用。

命题 6.5: 平均成本函数和边际成本函数的性质

设 C 为成本函数。

- (1) 如果 C 为凸函数,则 AC 递增。
- (2) 如果 C 可微,则 $\lim_{y \rightarrow 0} AC(y) = MC(0)$ 。
- (3) 如果 C 可微,那么,当 $AC(y) < MC(y)$ 时, AC 在 y 处递增;当 $MC(y) < AC(y)$ 时, AC 在 y 处递减。

证明: (1) 设 $a > b$ 且 $\lambda = b/a$, 则有 $\lambda a + (1-\lambda)0 = b$ 。由于 C 是凸函数,我们有 $C(b) \leq \lambda C(a) + (1-\lambda)C(0) = \lambda C(a)$, 因此, $AC(b) = C(b)/b \leq C(a)/a = AC(a)$ 。

(2) 我们有 $\lim_{y \rightarrow 0} AC(y) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{C(y)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{C(y) - C(0)}{y - 0} = C'(0)$ 。

(3) 对 AC 求导,可以得到:

$$AC'(y) = C'(y)/y - C(y)/y^2 = (MC(y) - AC(y))/y$$

可得命题 6.5 的结论。

也可以直观理解命题 6.5 的第(3)部分: $C(y)$ 是从 0 到 y 单位产品的边际成本的总和,因此 $AC(y)$ 是 $MC(z)$ 的平均值 ($0 \leq z \leq y$)。如果 $MC(y) > AC(y)$, 那么随着 y 上升,增加的成本大于 $AC(y)$, 因此平均成本也上升。

一个生产者成本函数为 C , 产出价格为 p , 生产 y 单位的产出,其利润为:

$$py - C(y)$$

接下来的命题 6.6 讨论的是最大化生产者的产量决策,其结论是显而易见的。这种生产者选择的最优产量为正的例子如图 6.5(a)所示。

命题 6.6: 追求产出最大化的生产者选择的产量

追求产出最大化的生产者的成本函数为 C , 产出价格为 p 时, 如果存在产量 y^* 满足 $C(y^*)/y^* = AC(y^*) = p$, 那么该生产者会决定生产这个最大的正产量 y^* ; 否则生产者选择不生产。

追求利润最大化的生产者, 成本函数是凸函数且可微, 其选择的最优产量也很容易刻画。这种生产者选择的最优产量为正的例子如图 6.5(b) 所示。

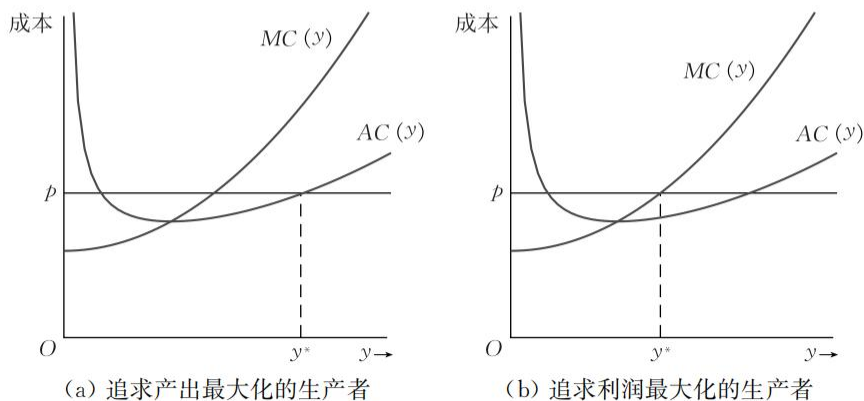


图 6.5 价格为 p 时生产者选择的最优产量

命题 6.7 追求利润最大化的生产者选择的产量

追求利润最大化的生产者的成本函数为 C (凸且可微), 产出价格为 p 。如果 $p \geq AC(y^*)$, 该生产者会生产 y^* 单位产品, y^* 满足 $C'(y^*) = MC(y^*) = p$; 如果 $p < AC(y^*)$, 则生产者选择不生产。

证明: 已知 C 是凸函数, 因此 $[py - C(y)]$ 是凹函数。由可微函数求最大值的一阶条件可得命题 6.7 的结论。

6.5 生产者偏好

我们讨论了两种可能的生产者偏好: 追求产出最大化和追求利润最大化。绝大多数教科书仅关注利润最大化。相比之下, 消费者理论中对个人偏好的设定, 通常只施加一些较为宽松的假设(在第 4 章中讨论过)。

为什么通常假设生产者追求利润最大化? 有人认为这是一个规范性假设: 生产者就应该追求利润最大化。也有人认为这是描述性假设: 生产者的主要目标就是实现利润最大化。一些研究者认为, 只是因为在这样的假设条件下, 经济学家才能得出有趣的、重要的结论。另一些研究者认为这样假设才能让学生们相信利润最大化是生产者唯一合法的目标。

我们对这个问题不发表意见。只是建议读者在思考这个问题时, 想一想经济学和其他学科的学生会如何回答本章开头的问题。

你会决定选择追求利润最大化并解雇 96 名员工,还是牺牲所有利润不裁员?或者你会选择折中方案,解雇 26 人或 52 人?当然,你解雇的员工数不会超过 96 人,解雇多于 96 人比解雇 96 人更糟糕,因为解雇的人更多了,利润却更少了。

当向不同学科的学生提出这个问题时,经济学的学生往往比哲学、法学、数学和商专业的学生倾向于解雇更多的员工。目前尚不清楚这种影响究竟是由于选择偏差(选择学习经济学的学生与其他学科的学生不同),还是因为经济学教育的影响(学习资料中都假设了利润最大化,对经济学的学生产生了影响)。无论如何,即使是经济学专业的学生,也只有约一半的学生会追求利润最大化。因此,也许利润最大化不应是我们所研究的生产者的唯一目标?

课后习题

1. 比较静态分析。命题 6.2 和命题 6.4 给出了生产者的生产函数是凹函数时的比较静态分析结果。下面我们来讨论生产者的成本函数是凸函数时的比较静态分析结果。

对于追求产出最大化和利润最大化的生产者,分别画图分析:(1)产出价格上涨的影响;(2)技术变革使得边际成本降低的影响。

2. 两家工厂。一个生产者能用两家工厂生产一种产品,两家工厂的生产函数分别是 $f(a_1)=\sqrt{a_1}$ 和 $g(a_2)=\sqrt{a_2}$,其中 a_i 是工厂 i 的投入品的数量。1 单位投入品的成本是 1,建立一家工厂的固定成本是 $k>0$ 。请计算这个生产者的成本函数。

3. 生产者解雇员工要付出代价。一个生产者使用工人这一种投入品,根据生产函数 f 来进行生产。他已经雇佣了 a_0 名员工,可以选择解雇部分或全部员工,或是再雇佣一些员工。员工的工资为 w ,产出品价格为 p 。请比较生产者追求最大化利润时的行为与他认为每解雇一名员工要损失 $l>0$ 时的行为。

4. 《鲁滨逊漂流记》。鲁滨逊·克鲁索既是生产者也是消费者,他有 1 单位时间,可以用来休闲和工作。如果他投入 x 单位的时间用于工作,则他生产出的产品的数量为 $f(x)$,其中 f 是递增的且严格凹的。他对所有的休闲-消费组合 (l, c) 构成的集合的偏好关系是单调的、凸的,可由一个可微的效用函数 u 表示。

(1) 写出鲁滨逊的最优选择 (l, c) 所要解决的经济学问题。

(2) 请求出鲁滨逊问题的解,其中, $f(x)=\sqrt{x}$, $u(l, c)=lc$ 。

(3) 请解释为什么在鲁滨逊选择的 (l^*, c^*) 处,休闲和消费之间的边际替代率等于 $f'(1-l^*)(x=1-l^*$ 时的边际产出)。

(难度提高)现假设鲁滨逊拥有两个相互独立的决策单元。一个单元决定生产多少,另一个单元决定消费多少,两个单元同时决策。每个单元都假定 1 单位用于工作的时间的价值为 w 。给定预算约束 $c=w(1-l)+\pi$ (其中 π 是生产单元的利润),决定消费的决策单元选择使得 $u(l, c)$ 最大化的休闲-消费组合 (l, c) 。

生产单元必须为 1 单位用于工作的时间支付工资 w , 并做出使得该组织利润最大化的决策。

两个决策单元是协调一致的, 其含义是: 给定劳动的价格 w , 决定消费的产品的数量与决定生产的产品的数量是一致的。

- (4) 写出消费与生产单元协调一致所需的条件。
- (5) 假设 $f(x) = \sqrt{x}$, $u(l, c) = lc$, 请求出满足上一问的条件的 w^* 与相关组合 (l^*, c^*) 。
- (6) 画图说明为什么鲁宾逊在上一个题中与本题中的决策方式不同但行为(决策结果)却相同。
- (7) 假设鲁宾逊的生产单元追求的是产出最大化而不是利润最大化。请画图证明协调一致的组合 (l^*, c^*) 与约束条件为 $c = f(1-l)$ 时, 使得 $u(l, c)$ 最大化的组合不一样。

本章说明

6.5 节讨论的问题详见 Rubinstein (2006b)。本章的阐述借鉴了 Rubinstein (2006a, Lecture 6b)。

▶ 7

垄断

7.1 基本模型

在上一章,我们假设生产者的行为对投入品和产出品价格没有影响。我们认为,如果生产者的投入量和产出量相对于市场交易总量而言很小,这个假设就是合适的。

我们将在本章研究几个新模型,它们适用的情形与之前有所不同:仅有一个生产者向市场提供某种产品。不同版本的模型中的生产者能为潜在买家提供不同类型的选择。在基本模型中,生产商规定一个单价,每个买家可以按该单价购买任意数量的商品。在其他版本的模型中,生产者可以使用其他定价策略,比如为消费者提供一系列价格-数量的组合。在每个模型中,每个潜在买家都会做出他最偏好的选择;生产者可以准确预测买家的反应,并采取相应行动以实现其目标(例如最大化利润或增加产量)。

考虑到每个市场可能具有多个细分市场,每个细分市场有不同的需求函数。因此,每个市场由两个要素组成:(1)每个细分市场的需求函数;(2)对生产者的描述,包括生产者的成本函数和偏好。

定义 7.1:垄断市场

单一商品的垄断市场 $\langle (q_i)_{i=1}^k, C, \succsim \rangle$ 由以下两部分组成。

需求

$(q_i)_{i=1}^k$ 是一组递减函数,其中 $q_i: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ 。 q_i 是细分市场 i 的需求函数,与价格 p_i 有关,当细分市场的价格为 p_i 时,该细分市场的需求量为 $q_i(p_i)$ 。

生产者

市场中唯一的生产者,又称垄断者。对它的描述由成本函数 C 和对 $((y_1, \dots, y_k), \pi)$ 的偏好关系 $\succsim$ 组成,其中, C 是连续的凸函数,且满足 $C(0)=0$, y_i 是在细分市场 $i=1, \dots, k$ 中售出的商品数量, π 是生产者利润。

7.2 统一定价的垄断市场

首先我们研究在所有细分市场设定相同价格的垄断者。垄断者之所以这样

做,可能是因为法律禁止对不同的细分市场设定不同的价格(例如,向男性和女性收取不同的价格可能是违法的)。此外,如果一个人可以在一个细分市场中以低价购买某商品并在另一个细分市场中高价出售该商品,那么生产者在不同细分市场中设定不同价格的能力就会受到限制。(这种套利对于书籍等商品比对理发等其他商品更容易操作。)

定义 7.2:统一定价的垄断市场

统一定价的垄断市场是指生产者在所有细分市场都设定相同价格的垄断市场。

7.2.1 追求利润最大化的垄断者

设 $\langle (q_i)_{i=1}^k, C, \geq \rangle$ 是统一定价的垄断市场。总需求函数 Q 定义为,对于所有 p , $Q(p) = \sum_{i=1}^k q_i(p)$ 。生产者在统一定价的垄断市场中定价为 p ,其利润为 $\pi(p) = pQ(p) - C(Q(p))$ 。根据已知, q_i 是单调递减的,于是, Q 也是单调递减的,所以函数 Q 存在反函数,令其为 P 。因此,生产者设定价格 p 后获得的利润为 $\pi(p)$,相当于先选择产出 $y = Q(p)$,然后再获得利润 $\Pi(y) = P(y)y - C(y)$ 。

在对统一定价的垄断市场的分析中,一个比较有用的概念是边际收益。

定义 7.3:边际收益

假设需求函数 Q 可微,产出为 y 时的边际收益为:

$$MR(y) = [P(y)y]' = P(y) + P'(y)y$$

其中, P 是 Q 的反函数。

$MR(y)$ 表示产量增长时的收益变化量。如果函数 P 是递减的,对任意产出 y 都有 $MR(y) \leq P(y)$ 。直观上不难理解,这个不等式之所以成立,是因为多卖出一单位商品虽然会增加约 $P(y)$ 的收益,但也会导致卖出的所有 y 单位商品的价格下降。

通常情况下,我们假设 MR 是递减的,但这个性质无法根据我们之前所做的假设推导出来。产量为 y 时, MR 的导数等于 $[2P'(y) + P''(y)y]$,如果 $P''(y)$ 是正数且足够大,那么即使 P 是递减的, MR 的导数也是正数,它就不是递减的。例 7.1 说明了 MR 未必是递减的(这个例子中的商品是不可分割的)。

例 7.1 边际收益不递减的垄断者

假设市场中的商品是不可分割的。有三个消费者,每个人要么购买 1 单位的商品,要么根本不买。当且仅当价格小于等于 10 时,第一个消费者会购买 1 单位的商品;当且仅当价格小于等于 6 时,第二个消费者会购买 1 单位的商品;当且仅当价格小于等于 5 时,第三个消费者会购买 1 单位的商品。 $P(y)$ 是厂商能够把 y 单位商品卖出去的最高价格。因此, $P(1) = 10$, $P(2) = 6$, $P(3) = 5$ 。由于商品是不可分割的,所以产量为 y 时的边际收益为: $MR(y) = P(y)y - P(y-1)(y-1)$,

y	$TR(y)$	$MR(y)$
1	10	10
2	12	2
3	15	3

如表中所示,其中 $MR(3) > MR(2)$ 。

以下命题讨论了在统一定价的垄断市场中追求利润最大化的生产者的最优产量需要满足的必要条件。

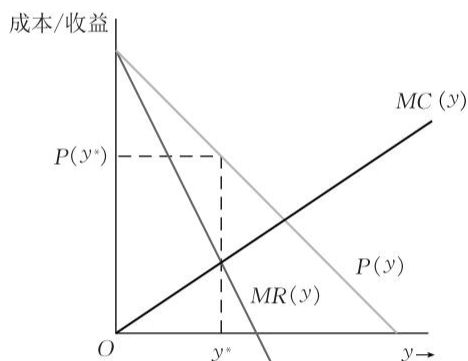
命题 7.1: 统一定价且追求利润最大化的垄断者

假定统一定价的垄断市场为 $\langle (q_i)_{i=1}^k, C, \geq \rangle$, 其中, C 和 q_i 都是可微的。对任意价格 p , 令 $Q(p) = \sum_{i=1}^k q_i(p)$, MR 是边际收益函数, MC 是边际成本函数。如果垄断者的偏好 $\geq$ 是追求利润最大化, 最优产量 y^* 是正数, 那么, 有 $MR(y^*) = MC(y^*)$ 。

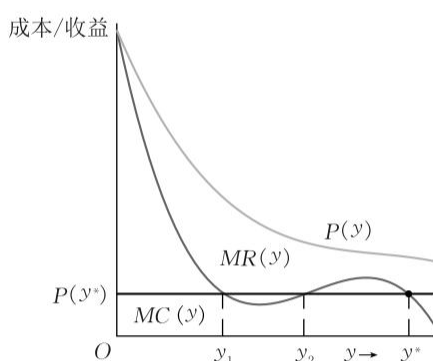
证明: 垄断者选择可使 $[pQ(p) - C(Q(p))]$ 最大的 p , 或可使 $[P(y)y - C(y)]$ 最大的 y , 其中, P 是 Q 的反函数。根据使可微函数最大化的内部解所满足的必要条件(一阶条件), 很容易得到这个结论。

请注意, 命题 7.1 的条件是必要条件, 不是充分条件。在图 7.1(a) 中, 只有一个产量 y^* 满足 $MR(y) = MC(y)$, 且产出为 y^* 时利润达到最大值。在图 7.1(b) 中, 有三个产量满足 $MR(y) = MC(y)$, 产量为 y^* 时利润最大, 因为产量为 y^* 时 MR 曲线下区域(总收益)与 MC 曲线下区域(总成本)面积之差大于产量为 y_1 和 y_2 时这两块面积之差。

无效率 由于对所有 y 都有 $MR(y) < P(y)$, 结合命题 7.1 可知, 在统一定价的垄断市场中, 追求利润最大化生产者所确定的价格大于这个产量水平下的边际成本。这就导致市场无效率的出现: 多生产一单位商品的成本低于买家愿意为这



(a) $MR(y) = MC(y)$ 有唯一的解。



(b) $MR(y) = MC(y)$ 有多个解。

图 7.1 在统一定价的垄断市场中, 追求利润最大化生产者确定的最优产量 y^* 及其对应的价格 $P(y^*)$

一单位商品支付的价格。垄断者不会继续增加产量,因为他知道多生产一单位商品会使所有销售出去的商品价格都下降,导致利润减少。

有些时候,需求函数的反函数曲线下方的面积被用来衡量卖出 y 单位商品时消费者所得到的福利:

$$W(y) = \int_0^y P(x) dx \quad (7.1)$$

如果商品是不可分割的,这个定义背后的逻辑比较容易理解,此时,消费者要么购买一单位商品,要么什么也不买。 $P(1)$ 是市场中所有消费者为购买该商品愿意支付的最高价格, $P(2)$ 是在价格为 $P(1)$ 时没有购买商品的其余消费者愿意为该商品支付的最高价格,以此类推。那么,积分 $W(y)$ 就类似于对 $[P(1) + P(2) + \dots + P(y)]$ 求和,它相当于销量为 y 时垄断者所获得的最高总收入。

边际成本曲线下在 0 和 y 之间的区域是生产 y 单位所需的总成本。因此,我们经常将需求函数和边际成本函数作差,再求这个差值在 0 和 y 之间的积分,以此衡量生产 y 单位的产品为社会带来的福利。在图 7.2 中,生产 y_c 时福利最大,其中, y_c 满足 $P(y_c) = MC(y_c)$ 。因此,由于生产者垄断经营而造成的福利损失是图中灰色三角形的部分。该三角形被称为由于垄断而造成的无谓损失(deadweight loss)。

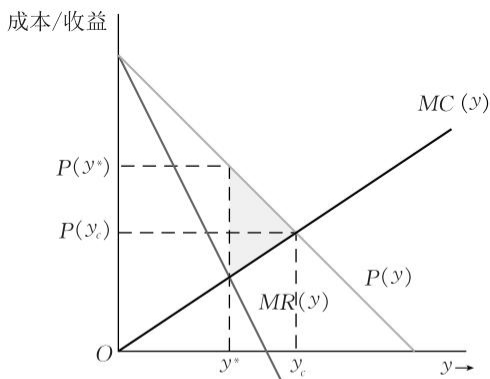


图 7.2 产出由 y_c 减少至 y^* 时的社会福利损失

有两个政策可以限制垄断者的行为,即设置最高定价和为垄断者提供补贴。

最高限价 规定垄断者能销售的最高价格为 $p_{\max}$,那么如果 $P(y) < p_{\max}$, MR 的值与规定最高限价之前相同;如果 $P(y) > p_{\max}$,则 $MR(y) = p_{\max}$ 。也就是说, MR 函数不是连续的,而是由两部分组成,见图 7.3(a)中的两条深灰色实线。

如果最高限价 $p_{\max}$ 设为与 $P(y_c)$ 相等, y_c 就是 $P(y_c) = MC(y_c)$ 的解,那么生产者会生产 y_c 单位的产品,他的利润将下降,无谓损失消失。

补贴 每卖出一单位的商品,除了消费者支付的金额外,生产者还能获得 t 单位的补贴。这个补贴使 MR 曲线整体上移 t 个单位,此时, MR 和 MC 的交点对应

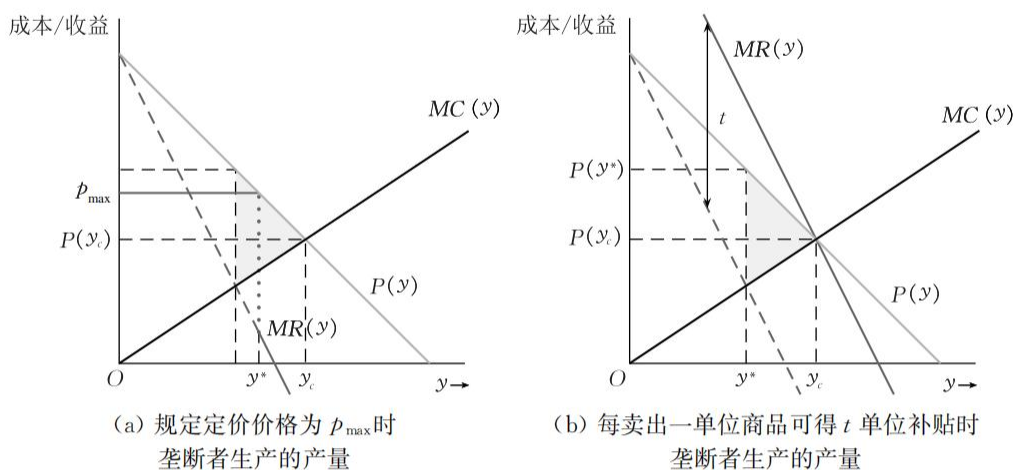


图 7.3 在统一定价的垄断市场中改变生产者产量的政策的影响

的产量比没有补贴的时候高。如果补贴的金额设置得合适,垄断者最终会生产 y_c 单位的产品[如图 7.3(b)所示]。然而,如果该补贴由消费者承担,这个政策可能并不会提高消费者福利。

7.2.2 追求产量最大化的垄断者

如第 6 章所述,利润最大化并不是生产者的唯一目标。如果一个垄断者在利润非负的前提下追求产量最大化,该垄断者生产的数量将为 y^* , y^* 满足 $AC(y^*) = p(y^*)$ (如图 7.4 所示)。而追求消费者福利 $W(y)$ 最大化的垄断者会生产 y_c 单位的产品,显然, y^* 大于 y_c 。

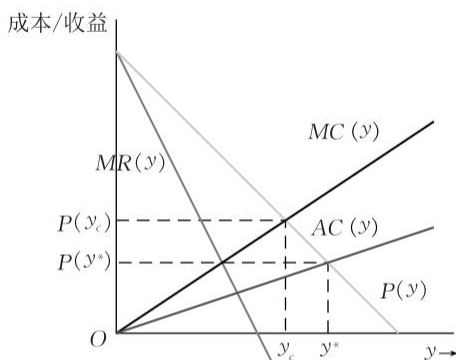


图 7.4 在统一定价的垄断市场中追求产量最大化的生产者将生产 y^* 单位的产品,对应的价格为 $P(y^*)$

7.3 歧视性垄断

接下来,我们定义一种特殊的垄断市场:生产者可以在不同的细分市场设定不

同的价格。

定义 7.4: 歧视性垄断市场

歧视性垄断(discriminatory monopoly)市场指在一个垄断市场中生产者制定一组价格,在不同细分市场以不同的价格销售相同的产品。

请注意,这个模型假设每个细分市场的需求仅取决于该细分市场的产品价格。特别是,这与其他细分市场的价格无关,所以我们隐含假设消费者可能会认为对不同群体设定不同的销售价格是不公平的,但消费者的需求函数不受这种想法的影响。

设 $\langle (q_i)_{i=1}^k, C, \geq \rangle$ 是一个歧视性垄断市场。在这个市场中的生产者追求利润最大化,那么生产者的问题可以用如下公式表示:

$$\max_{y_1, \dots, y_k} \left[\sum_{i=1}^k P_i(y_i) y_i - C\left(\sum_{i=1}^k y_i\right) \right] \quad (7.2)$$

其中, P_i 是 q_i 的反函数。请注意,因为成本是总产量的函数,所以我们不能将这个问题分解为 k 个独立的问题来求解。

在统一定价的垄断市场中的生产者如果追求利润最大化,其确定的产量要满足一定的必要条件(见命题 7.1),命题 7.2 将其推广到了歧视性垄断市场。

命题 7.2: 追求利润最大化的歧视性垄断市场

一个歧视性的垄断市场为 $\langle (q_i)_{i=1}^k, C, \geq \rangle$,其中, C 和 q_i 都是可微的。对每个细分市场 i , 设 MR_i 是边际收益函数, MC 是边际成本函数。如果垄断者追求利润最大化,且其在细分市场 i 中的最优产量 y_i^* 为正数,那么有:

$$MR_i(y_i^*) = MC\left(\sum_{j=1}^k y_j^*\right)$$

证明: 命题 7.2 由可微的式(7.2)取最大值的必要条件(一阶条件)推导出来。

这个结论背后有两个直观理由。第一,所有产出为正的细分市场的边际收益必须相同,不然的话,生产者可以将部分产品从边际收益较低的细分市场转移到边际收益较高的细分市场去销售,以此提高利润。第二,如果边际成本高于共同的边际收益,那么生产者可以通过减少产量来提高利润;如果边际成本低于共同的边际收益,则可以通过增加产量来提高利润。

如图 7.5 所示,曲线 $MR(y)$ 是各个细分市场的 MR_i 曲线沿横轴求和所得到的。对于任意一个产量 y , $MR(y)$ 是垄断厂商的边际收益,他将总产量 y 最优地分配到各个细分市场中。

7.4 隐性歧视

在本节中,我们假设垄断者知道消费者有不同的需求函数,但不能明确地实行歧视性定价,这可能是因为垄断者被禁止这样做,也可能是因为垄断者不知道每个

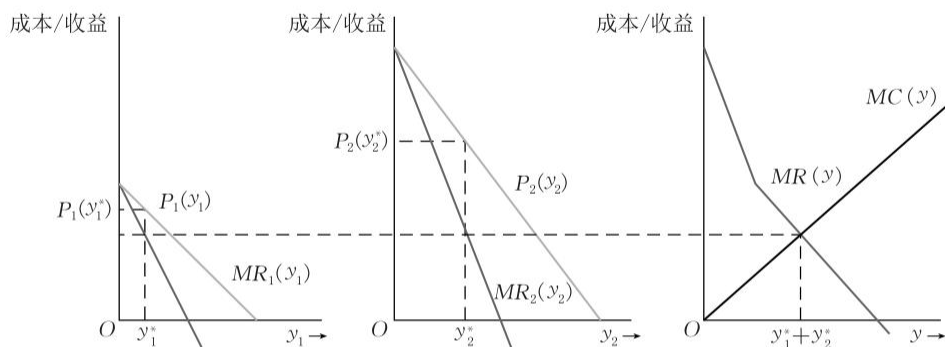


图 7.5 追求利润最大化的生产者在歧视性垄断市场的每个细分市场中的产量

注:在细分市场 i 中选择的产量为 y_i^* , 价格为 $P_i(y_i^*)$ 。

消费者的需求函数到底属于哪一种。但垄断者可以向消费者提供若干个数量和费用的组合 (q, m) , 其中, q 是商品的数量, m 是消费者购买 q 单位商品需要支付的费用(总价格)。所有这些组合构成一个集合。垄断厂商把这个集合提供给所有消费者, 每个消费者要么在这个集合中选择其中之一, 要么什么也不买。

接下来, 我们考虑这样一个市场——消费者可以购买的商品数量为 0 到 1 之间的任何一个值。每一个消费者 i 最多愿意为 q 单位商品支付的金额为 $V^i(q)$, 其中 V^i 是递增且连续的, 而且 $V^i(0) = 0$ 。市场中唯一的生产者(垄断者)可以零成本地生产产品。

垄断者可以提供的所有组合 (q, m) 所构成的有限集合, 我们称之为菜单。如果消费者 i 选择某个组合 (q, m) , 那么其效用为 $[V^i(q) - m]$ 。如果最大效用是非负值, 则消费者选择菜单中使得效用最大的那个组合 (q, m) ; 否则, 消费者什么也不买。在假设消费者总是做出最优选择的情况下, 垄断厂商设定使其利润(即消费者支付总额)最大化的菜单。

定义 7.5: 菜单化定价的垄断市场

一个菜单化定价的垄断市场由以下两部分构成。

需求

有一组连续的增函数 $(V^i)_{i=1}^n$, 其中, $V^i: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}_+$, $V^i(0) = 0$ 。 V^i 是消费者 i 的价值函数, 它表示消费者 i 愿意为 q 单位商品支付的最大金额 $V^i(q)$ 。

生产者

市场中唯一的生产者, 又称垄断者。垄断者需要支付的生产成本总是 0。他设定由若干个组合 (q, m) 构成的集合 M , M 又被称为菜单, 其中, (q, m) 表示一个可选组合——消费者以(总)价格 m 购买 q 单位商品。

如果对于某些 $(q, m) \in M$ 有 $V^i(q) - m \geq 0$, 那么消费者 i 选择使 $[V^i(q) - m]$ 的值最大化的 $(q, m) \in M$; 否则, 消费者什么也不买。生产者制定最优的 M , 目的是让消费者的选择给自己带来最大的利润。

我们现在分析一个菜单化定价的垄断市场: 市场中有两个消费者, 一个消费者

比另一个消费者对额外一单位商品的评价更高。下面的命题的含义为:在这样的垄断市场中,垄断者的最优选择是提供包含多于1个组合的菜单。

命题 7.3:菜单化定价的垄断市场

假设垄断市场中有两个消费者,垄断者提供的菜单为 (V^1, V^2) ,当 $q^1 > q^2 \geq 0$ 时,有 $V^1(q^1) - V^1(q^2) > V^2(q^1) - V^2(q^2)$ 。令 q^* 是使 $[2V^2(q) - V^1(q)]$ 取最大值的值。垄断者的最大利润为:

$$\max\{V^1(1), 2V^2(1), V^1(1) + 2V^2(q^*) - V^1(q^*)\}$$

● 在上式的三项中,如果 $V^1(1)$ 的值最大,则 $\{(1, V^1(1))\}$ 是最优菜单,此时,消费者1会购买 $(1, V^1(1))$,消费者2则什么都不买。

● 如果 $2V^2(1)$ 的值最大,则 $\{(1, V^2(1))\}$ 是最优菜单,两个消费者都会购买 $(1, V^2(1))$ 。

● 如果 $[V^1(1) + 2V^2(q^*) - V^1(q^*)]$ 的值最大,则 $M^* = \{(q^*, V^2(q^*)), (1, V^1(1) - (V^1(q^*) - V^2(q^*)))\}$ 是最优菜单;消费者2会购买 $(q^*, V^2(q^*))$,消费者1会购买 $(1, V^1(1) - (V^1(q^*) - V^2(q^*)))$ 。

证明:首先请注意,如果垄断者为消费者提供的菜单无人购买,则他不能获利。因此,包括一个或两个组合的最优菜单一定存在。

我们先来讨论第一种情况:菜单只包括单一组合 (q, m) 。(1)如果 $V^1(q) < m$,则两个消费者都什么也不买,此时垄断者利润为0。(2)如果 $V^2(q) < m \leq V^1(q)$,则只有消费者1会购买此组合或菜单。在所有满足这个不等式的菜单中,对垄断者来说最优菜单是 $\{(1, V^1(1))\}$,可以获得利润 $V^1(1)$ 。(3)如果 $m \leq V^2(q)$,则两个消费者都会购买此菜单。在所有满足这个不等式的菜单中,对垄断者来说最优菜单是 $\{(1, V^2(1))\}$,可以获得的利润是 $2V^2(1)$ 。

下面我们讨论第二种情况:菜单的集合 $\mathcal{M}_2$ 包括两个选项,每个消费者各选择其中一个。命题7.3中菜单 M^* 是集合 $\mathcal{M}_2$ 中的一个元素。(消费者1认为这两个组合没有区别。消费者2认为 $(q^*, V^2(q^*))$ 和什么都不买没有区别,根据对 V^1 和 V^2 关系的假设可得:当组合为 $(1, V^1(1) - (V^1(q^*) - V^2(q^*)))$ 时,消费者2的效用是非正的,因此他不会购买此组合。)

接下来,我们要证明:如果菜单 $\{(q^1, m^1), (q^2, m^2)\}$ 是在 $\mathcal{M}_2$ 中的最优菜单,而且消费者 i 会选择组合 (q^i, m^i) ,那么这个菜单一定是 M^* 。

第一步 $V^2(q^2) = m^2$

证明:假设两个消费者都会购买一种组合,则有 $V^i(q^i) \geq m^i (i=1, 2)$ 。我们现在要证明:对某一消费者 i ,有 $V^i(q^i) = m^i$ 。如果对两个消费者来说都有 $V^i(q^i) > m^i$,那么存在 $\epsilon > 0$ 且足够小,使得在 m^i 的基础上增加 ϵ 会使得垄断者利润增加 2ϵ 。如果 $V^1(q^1) = m^1$,那么,由于对所有 q 都有 $V^1(q) > V^2(q)$,可得 $0 = V^1(q^1) - m^1 \geq V^1(q^2) - m^2 > V^2(q^2) - m^2$,这与 $V^2(q^2) \geq m^2$ 相矛盾,所以,一定有 $V^2(q^2) = m^2$ 。 ■

第二步 $(q^1, m^1) = (1, V^1(1) - (V^1(q^2) - V^2(q^2)))$

证明:如果消费者 1 选择 (q^1, m^1) , 需满足条件 $V^1(q^1) - m^1 \geq V^1(q^2) - m^2 = V^1(q^2) - V^2(q^2)$ (由第一步可知), 或者 $m^1 \leq V^1(q^1) - (V^1(q^2) - V^2(q^2))$ 。当给定 (q^2, m^2) 时, 满足这个条件的 (q^1, m^1) 是 $(1, V^1(1) - (V^1(q^2) - V^2(q^2)))$ 。■

由第一步和第二步可得, $\mathcal{M}_2$ 中的最优菜单的形式为 $\{(q^2, V^2(q^2)), (1, V^1(1) - (V^1(q^2) - V^2(q^2)))\}$ 。提供这个菜单, 垄断者可获得的利润为 $V^2(q^2) + V^1(1) - (V^1(q^2) - V^2(q^2)) = 2V^2(q^2) + V^1(1) - V^1(q^2)$, 当 $q^2 = q^*$ 时, 它取得最大值。因此, M^* 在集合 $\mathcal{M}_2$ 中是最优的。

图 7.6 举了一个垄断市场的例子, 在这个例子中, 包括两个选项的菜单是最优的。

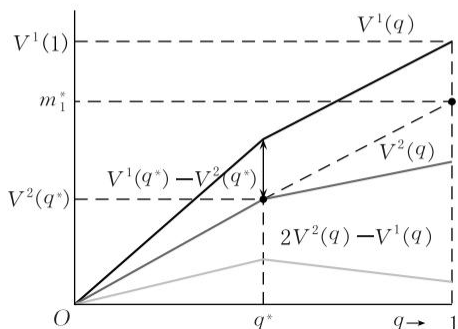


图 7.6 垄断市场的一个例子

注: 使垄断者利润最大化的菜单包括两个选项: $(q^*, V^2(q^*))$ 和 $(1, m_1^*)$, 其中 $m_1^* = V^1(1) - (V^1(q^*) - V^2(q^*))$ 。

课后习题

1. 双份利润。在一个统一定价的垄断市场中, 假设生产者追求利润最大化, 且不存在生产成本。
 - (1) 假设市场中商品是不可分割的。市场中有两个消费者, 每个消费者要么购买一单位商品, 要么不购买商品。一个消费者愿意支付 10 美元购买该商品, 另一个消费者愿意支付 8 美元购买该商品。垄断者会如何定价?
假设现在假设垄断者不直接将商品出售给消费者, 而是将其出售给中间商, 中间商再以统一价格出售给所有消费者。
 - (2) 在问题(1)的假设下, 请写出中间商的需求函数, 并分析生产者的行为。
 - (3) 如果商品是可分割的, 垄断者的成本函数为 $c(y) = y^2$, 消费者的反需求函数为 $P(y) = 1 - y$ 。请重新计算问题(1)和问题(2)的答案。
 - (4) 请证明: 如果垄断者的成本函数是凸的, 且消费者的反需求函数为 $P(y) = A - By$, 那么, 有中间商时垄断者的产量最多和垄断者直接销售给消费者 (不存在中间商) 时的产量一样。
2. 征税。
 - (1) 在统一定价的垄断市场中, 如果征收营业税, 追求利润最大化的垄断者会提

高定价,价格提高的幅度大于所征的营业税。我们假设:市场中有一个垄断者销售一种商品,不存在生产成本;市场中有两个消费者 1 和 2。如果消费者 i 需要支付的价格小于等于 v^i ,他才会购买一单位商品。假设 $v^1=1>v^2=v>0$ 。请证明:对于某些 v 值和 t 值,征收 t 单位的税以后,垄断者制定的价格会上升而且上升的幅度超过 t 。

(2) 请证明:如果垄断者面临线性反需求函数 $P(q)=A-Bq$,且有一个不变的边际成本 c ,那么由于征收 t 单位的税而导致价格上升的幅度小于 t 。

3. 垄断者关注公平。设垄断者所处的市场有两个细分市场,二者的需求函数分别为 q_1 和 q_2 ,不存在生产成本。假设垄断者在结果公平的前提下追求利润最大化,结果公平的含义是: $W_1(q_1(p_1))-p_1q_1(p_1)=W_2(q_2(p_2))-p_2q_2(p_2)$,其中 p_i 是细分市场 i 的价格, $W_i(q)$ 是反需求函数 P_i 下方在 0 和 q 之间的面积,如式(7.1)所示。(与之前一样, $W_i(q)$ 衡量的是细分市场 i 中消费者消费 q 单位商品所得到的福利。)

请写出该垄断者的最优化问题,并在假设 $q_i(p_i)=a_i-p_i$ ($i=1, 2$ 且 $a_1\geq a_2$) 的情况下,求这个最优化问题的解。最后,请比较这个问题的解与无约束条件下垄断者追求利润最大化的解。

4. 非线性定价。假设市场中仅有一种不可分割的商品;每个人可以消费 1 单位或 2 单位商品。垄断者无需支付任何生产成本;市场中有两个消费者。消费者 i ($i=1, 2$) 最多愿意为 q 单位商品支付 $V^i(q)$,其中 $V^i(2)>V^i(1)>V^i(0)=0$ 。垄断者无法在这两个消费者中进行歧视性定价,但是可以提供非线性定价:消费者购买的第 1 个单位商品的价格不必与第 2 个单位商品的价格相同。

请举一个例子来说明追求利润最大化的垄断者会这样定价:第 2 个单位的商品价格低于第 1 个单位的商品价格。然后,再举一个例子来说明追求利润最大化的垄断者会这样定价:第 2 个单位的商品价格高于第 1 个单位的商品价格。

5. 捆绑销售。一个追求利润最大化的垄断者生产两种不可分割的商品 A 和 B ,生产成本均为 0。消费者 i 愿意最多支付 v_a^i 购买商品 A ,愿意最多支付 v_b^i 购买商品 B ,愿意最多支付 $(v_a^i+v_b^i)$ 购买商品 A 和 B 。垄断者可以单独销售这两种商品,也可以捆绑销售;且他对所有人必须收取同样的价格。请举两个例子,在其中一个例子中垄断者的最优做法是捆绑销售这两种商品,在另一个例子中垄断者的最优做法是单独销售这两种商品。

6. 两部定价。假设垄断者追求利润最大化,其成本函数 C 是可微的;市场中存在一个消费者,其反需求函数 P 是连续且递减的。令 $W(q)=\int_0^q P(x)dx$ 是消费者愿意为 q 单位商品支付的最高价格。垄断者出价 (A, p) ,其中 A 是从垄断者那里取得购买商品的资格所需支付的费用, p 是每购买一单位商品所需要支付的价格,故消费者购买 x 单位($x>0$)商品需支付的总费用是 $(A+px)$ 。请写出垄断者的最优化问题,并证明使垄断者利润最大化的产出 $q>0$ 满足 $P(q)=MC(q)$ 。

7. 隐性歧视。市场中有两个消费者,他们可购买的商品数量是离散的。 $V^i(q)$ 是消费者 i 为消费 q 单位商品而愿意支付的最高价格, $q=1$ 或 2 ,具体如下表所示。下表也列出了商品的边际价值 $MV^i(q)=V^i(q)-V^i(q-1)$,它指的是当消费者 i 已拥有 $(q-1)$ 单位商品时,为多消费一单位该商品愿意支付的最高价格。

q	$V^1(q)$	$MV^1(q)$	$V^2(q)$	$MV^2(q)$
0	0		0	
1	12	12	10	10
2	19	7	13	3

设垄断者追求利润最大化,其生产成本为 0。

- (1) 如果垄断者只能对所有消费者收取相同的价格,请求出垄断者制定的价格。
 - (2) 假设垄断者仅能提供一种选择 (q, m) ,其中 q 是商品的数量, m 是 q 单位商品的(总)价格。每个消费者要么支付金额 m 来购买 q 单位的商品,要么不买任何商品。请求出垄断者提供的 (q, m) 。
 - (3) 假设垄断者可提供给消费者一个菜单,包括两种选择 (q, m) ,每个消费者要么选择其中一个组合 (q, m) ,要么什么也不买。请证明:垄断者提供的菜单 $\{(1, 10), (2, 17)\}$ 可以使其利润最大化,此时他得到的利润为 27(消费者 1 选择 $(2, 17)$,消费者 2 选择 $(1, 10)$)。
8. 优惠券。一些商店会发放优惠券,给持有优惠券的消费者打折。为理解这个现象背后的逻辑,假设:一个垄断者追求利润最大化且无生产成本;市场中有两个人数相等的消费者群体。群体 1 里的每个消费者愿意支付 7 购买垄断者的商品,花费 4 去寻找优惠券;群体 2 中的每个消费者愿意支付 5 购买垄断者的商品,花费 1 去寻找优惠券。垄断者会提供什么样的价格和折扣?
9. 两名工人和一名雇主。一个雇主雇佣了两个工人 a 和 b 。每个工人可以生产的产量为 $[0, 1]$ 。如果一个工人 $i(=a, b)$ 生产产量为 y_i , he 可以得到工资 m_i ,该工人的收益为 $[m_i - e_i(y_i)]$,其中,函数 e_i 被用来表示工作成本或努力成本,它是递增、可微的凸函数,且满足 $e_i(0)=0, e'_i(0)<1, e'_i(1)>1$ 。假设对所有 $y>0$ 都有 $e'_a(y)<e'_b(y)$ 。该雇主的利润为 $(y_a + y_b - m_a - m_b)$ 。雇主可能提供的所有合同 (y, m) 组成一个菜单, (y, m) 的意思是:雇主将工资 m 付给生产了 y 单位产品的工人。每个工人可以选择他喜欢的某个合同,也可以一个合同都不选。请证明:对追求利润最大化的雇主来说,最优做法是提供一个包括两个不同的合同(即 (y_a, m_a) 和 (y_b, m_b)) 的菜单,二者分别会被 a 和 b 选择,而且 $e'_b(y_b)=1, 1-e'_a(y_a)=e'_a(y_a)-e'_b(y_a), m_a=e_a(y_a), m_b=e_b(y_b)+m_a-e_b(y_a)$ 。

本章说明

课后习题第 1 题出自 Tirole(1988:174)。

第二部分 均衡

弱肉强食经济

在第8章和第9章,我们将研究由一群人和一些房子构成的社会。每间房子只能住一个人,每个人只能占用一间房子。不同的人对房子有不同的偏好,但是,相对于无家可归,每个人都更愿意住在房子里,不管那个房子是什么样的。

在本章研究的模型中,房屋的分配取决于个人的能力;不存在财产和所有权的概念。如果一个人想要占有一间房,而这间房子目前由一个比自己弱的人占有,那么强者只需要跟住在房子里的弱者当面提出要求即可占有该房子。这种分配的过程是井然有序的:每个人都清楚其他人的能力;如果某人得知一个能力比自己强的人想要占有自己的房子,他会直接将房子腾出来给他,而不会与对方争抢,因为他知道争抢的结果一定是自己输。

我们将研究稳定的个人房屋分配方案的存在性及特点。人们会不停地把别人从房子里赶走吗?存在一种房屋的分配方案使得大家都不想占有比自己弱的人的房子吗?这种分配方案有什么性质?

8.1 模型

8.1.1 社会

我们可以用个人的集合、房子的集合以及个人对房子的偏好来定义社会。为了简化分析,我们假设房子和人的数量相等,且个人对任意两间房子的偏好都不是无差异的。

定义 8.1: 社会

一个社会 $\langle N, H, (\succsim^i)_{i \in N} \rangle$ 包括:

个人

一个有限集合 N 。

房子

一个有限集合 H , 而且 H 和 N 所含元素的数量相等。

偏好

任意个人 $i \in N$, 都对房子 H 有严格的偏好 $\succsim^i$ 。

$h \succ^i h'$ 的意思是, 相较房子 h' , 个人 i 更偏好占有房子 h 。请注意, 我们假设每个人只关心他所占有的房子, 而不关心其他人占有的房子。我们将在 8.6 节讨论这个假设。

模型的结果是将所有房屋分配出去, 也就是说, 分配是从个人集合 N 到房屋集合 H 的函数。我们通常用 a 来表示分配, 其中 $a(i)$ 表示分配给个人 i 的房屋。由于我们假设一间房最多可以住一个人, 因此, 只有在将不同的人分到不同的房子 (即这个函数是一对一函数) 时, 分配才是可行的。我们称这样的分配为最终配置。

定义 8.2: 分配和最终配置

一个社会的分配 $\langle N, H, (\succ^i)_{i \in N} \rangle$ 指的是从个人的集合 N 到房屋的集合 H 的函数, 将每一间房子与所有人关联起来。如果将每间房都恰好分给一个人, 那么可以称这样的分配为最终配置。

例 8.1 下表给出了一个示例, 该社会由四个人 1、2、3、4, 以及四间房 A、B、C、D 组成。每一列表示一个人的偏好顺序, 每个人最喜欢的房子位于每列的第一行。例如, 个人 1 的偏好顺序为 $B \succ^1 C \succ^1 D \succ^1 A$ 。

个人				
1	2	3	4	
B	B	A	B	
C	D	B	C	
D	A	C	A	
A	C	D	D	

在一个最终配置中, 个人 1、2、3、4 分别占有房屋 D、A、C、B, 如上表中灰底突出显示部分所示。

8.1.2 能力

什么决定房屋的最终配置? 很多人可能认为是个人偏好。但在本章, 我们关注另一个因素: 个人之间能力(power)的对比。假设对任意两人都存在一个稳定不变的能力对比关系: 不是 i 强于 j , 就是 j 强于 i 。不存在能力完全相同的两个人。准确来说, 我们假设个人集合上的双边关系 $\triangleright$ 是给定的, 其中 $i \triangleright j$ 表示 i 强于 j , 在这种情况下, i 可以占有 j 的房子。

定义 8.3: 弱肉强食经济

一个弱肉强食经济(jungle) $\langle N, H, (\succ^i)_{i \in N}, \triangleright \rangle$ 由社会 $\langle N, H, (\succ^i)_{i \in N} \rangle$ 和能力对比关系 $\triangleright$ 组成, $\triangleright$ 是定义在个人集合 N 上的完备、可传递、非对称的双边关系。

评注

1. 能力不仅指身体方面。一个人可能因为身体方面更强壮而比另一个人的能力更强。但是除了身体方面的能力之外, 他的社会地位、说服别人的能力或

资历也可能足以让另一个人心甘情愿地让出所占有的房子。

2. 不存在产权。该模型没有提到产权。个人可以占有房屋,但不能拥有房屋。也不存在保护个人对房屋的所有权的法律制度。房屋的分配由能力对比关系决定。在很多社会中,财产权或多或少会妨碍能力的发挥。很多经济学模型都假定了产权制度被完美执行的一种极端情况。本章我们考虑了另一种极端情况,即只有能力可以决定房屋的分配,不存在产权。
3. 争抢房屋的结果是确定的。个人能力之间的对比关系使得争抢房屋的结果是确定的:如果 $i \triangleright j$,那么在 i 和 j 的竞争中, i 一定获胜, j 绝不可能获胜。
4. 没有争抢房子的成本。也就是说,腾出房屋不需要成本。房屋占有者面对更强的个人时,都会认清自己处于弱势并无成本地让出房子。
5. 没有合谋。该模型只涉及每个人可能采取的行动,并不涉及由个人组成的群体可能采取的行动。这个设定反映了模型中的一个隐含假设:每个人都单独行动,没有一个群体可以取得个人无法取得的分配结果。

8.2 均衡

模型中的均衡通常是指在假设的各种力量的作用下达到的稳定状态。在弱肉强食经济中,稳定的状态就是这样一个配置状态:与自己当前占有的房子相比,没有人更喜欢他所能获得的其他人的房子。因此,如果某人相对于当前他占有的房子更喜欢一个比他弱的人所占有的房子,那么这个最终配置就不是均衡。

确切来说,弱肉强食经济的均衡是这样一种最终配置方案 a :没有任何一个人 i 相对于他所占有的房子 $a(i)$ 更喜欢另一个比他更弱的人 j 所占有的房子 $a(j)$ 。

定义 8.4:均衡

弱肉强食经济 $\langle N, H, (\geq^i)_{i \in N}, \triangleright \rangle$ 的均衡是一个最终配置方案 a^* ,使得找不到两个人 $i, j \in N$ 同时满足 $i \triangleright j$ 和 $a^*(j) \succ^i a^*(i)$ 。

例 8.2 弱肉强食经济由例 8.1 的社会和能力对比关系 $\triangleright$ 构成($1 \triangleright 2 \triangleright 3 \triangleright 4$),下表中突出显示出来的阴影部分表示的配置 (B, D, A, C) 就是一个均衡。

个人 1 和 3 占有他们最喜欢的房子。个人 2 和 4 没有占有他们最喜欢的房子,房子由比他们更强的 1 所占。个人 2 相对于能力弱于他的人(即 3 和 4)所占有的房子更偏好 D ;没有人比 4 的能力更弱。

个人			
1	2	3	4
B	B	A	B
C	D	B	C
D	A	C	A
A	C	D	D

每个弱肉强食模型都有一个均衡。也就是说,给定每一个个人集合、房子的集合、偏好关系和能力对比关系,都存在一个稳定的配置——至少一个,也可能不止一个——它不会因为人们在能力上的差异而改变。

我们接下来证明由一种被称为依次称霸(serial dictatorship)的分配程序所产生的配置是一种均衡,从而证明以上结论。首先,把所有人按某一顺序排列。接下来,按照这个分配程序,分配给第一个人其最喜欢的房子,即 h_1 ;在剩下的房子中,分配给第二个人除 h_1 以外他最喜欢的房子。之后继续以同样的方式分配:按个人的排列顺序,分配给个人除顺序在他之前的人已分配到的房子外他最喜欢的房子。

程序:依次称霸

一个社会为 $\langle N, H, (\geq^i)_{i \in N} \rangle$, N 个人中的顺序为 $i_1, i_2, \dots, i_n$,“依次称霸”可以按由以下方式归纳定义的程序产生配置。

初始分配

根据 i_1 的偏好关系 $\geq^{i_1}$, 分配给个人 i_1 在集合 H 中最好的房子 h_1 。

后续分配

对于任何 $k \geq 2$, 根据 i_k 的偏好关系 $\geq^{i_k}$, 分配给 i_k 在集合 $H \setminus \{h_1, \dots, h_{k-1}\}$ 中最好的房子 h_k 。

如果将这个分配程序应用于例 8.1 中的社会,且个人排列顺序为 1、2、3、4,那么可以得到配置 (B, D, A, C) 。由例 8.2 可知,能力关系为 $1 \triangleright 2 \triangleright 3 \triangleright 4$ 时,这个配置是弱肉强食经济的一个均衡。下面我们证明这个结论具有一般性。

命题 8.1: 每个弱肉强食经济都有一个均衡

对于任何一个弱肉强食经济 $\langle N, H, (\geq^i)_{i \in N}, \triangleright \rangle$, 在给定社会 $\langle N, H, (\geq^i)_{i \in N} \rangle$ 和个人按能力对比关系 $\triangleright$ 的排序时,由“依次称霸”程序产生的配置是一个均衡。

证明: 在社会 $\langle N, H, (\geq^i)_{i \in N} \rangle$ 中,能力对比关系为 $\triangleright$ 。不妨设由“依次称霸”程序产生的分配方案为 a 。由于房子和个人的数量相等,该程序分配给每个人一间房,而每间房仅被分配了一次,因此分配方案 a 是可行的,可以称为是一个配置。根据个人的偏好,分配给每个人的房子是在所有未分配给更强之人的房子中最好的,因此,这个配置是一个均衡。

请注意,“依次称霸”程序不是均衡概念本身,它只是一个证明均衡存在的方法。命题 8.1 没有排除由其他分配方式得到的其他均衡的存在,接下来下面我们要证明:事实上,不存在其他均衡。

命题 8.2: 每个弱肉强食经济都有唯一一个均衡

每个弱肉强食经济都有唯一一个均衡。

证明: 弱肉强食经济为 $\langle N, H, (\geq^i)_{i \in N}, \triangleright \rangle$ 。不失一般性,假设 $N = \{1, \dots, n\}$, $1 \triangleright 2 \triangleright \dots \triangleright n$ 。假设命题 8.2 的结论不成立,这个弱肉强食经济有两个均衡 a, b 。 i^* 表示在所有满足 $a(i) \neq b(i)$ 中能力最强的人 i 。也就是说,如下所示,对所有 $i < i^*$ 都有 $a(i) = b(i)$,且 $a(i^*) \neq b(i^*)$ 。

$i:$	1	2	...	i^*-1	i^*	...	j	...	k	...	n
$a(i):$	■	■	...	■	■	...	■	...	■	...	■
$b(i):$	■	■	...	■	■	...	■	...	■	...	■

在这两个最终配置中,分配给个人 1 到 (i^*-1) 的房子的集合是相同的,所以,分配给 i^* 到 n 的房子组成的集合也是相同的。因此房子 $a(i^*)$ (图中颜色最浅的房子) 在 b 中分配给了 j , 而 j 的能力弱于 i^* , 即 $a(i^*)=b(j)$ 。房子 $b(i^*)$ (图中黑色的房子) 在 a 中分配给了 k , 而 k 的能力弱于 i^* , 即 $b(i^*)=a(k)$ 。(j 可能强于 k 也可能弱于 k ; 在上图中, j 强于 k)。根据假设 a 是一个均衡, 于是有 $a(i^*) >_{i^*} a(k)=b(i^*)$; 根据假设 b 是另外一个均衡, 于是有 $b(i^*) >_{i^*} b(j)=a(i^*)$ 。显然, 存在矛盾。因此, 不可能存在 a 和 b 两个均衡。

评注

1. 均衡是静态的。弱肉强食经济中的均衡概念是静态的, 在本书中这个部分的其他地方出现的均衡的含义也是如此。课后习题第 5 题描述了一个从任意初始配置开始的动态分配过程, 并要求你证明这个动态过程收敛于一个均衡。
2. 严格偏好。假设个人偏好是严格的(也就是说, 没有任何一个人认为某两间房是无差异的), 这个假设对于命题 8.2 来说非常重要。课后习题第 1 题要求你证明, 如果一个或多个人认为某两间房是无差异的, 那么弱肉强食经济可能有不止一个均衡。

8.3 帕累托稳定性

现假设房子的配置不是由能力对比关系决定的, 而是由所有人达成一致的共识决定。只有当所有人都意见一致, 即无人反对且至少有一个人更喜欢另一个新配置时, 某个配置才会替代原来的配置。因此, 如果不存在对于某些人来说更好而对于任何人来说不会更差的配置, 那么当前的配置方案或状态就不会被取代。

换种方式表达: 如果 b 分配的房子至少和 a 分配的房屋一样好, 并且至少有一个人相对于 a 分配的房子更喜欢 b 分配的房子, 那么 b 帕累托优于 (Pareto dominate) a 。如果不存在一个配置帕累托优于某个配置, 那么该配置就是帕累托稳定 (Pareto table) 的。

定义 8.5: 帕累托稳定性

在社会 $\langle N, H, (\geq^i)_{i \in N} \rangle$ 中, 如果对所有 $i \in N$, 都有 $b(i) \geq^i a(i)$, 且对某些 $i \in N$, 有 $b(i) >^i a(i)$, 则称配置 b 帕累托优于 a 。一个配置可以被称为帕累托稳定的, 只要不存在另外一个配置帕累托优于它。

用 a 表示例 8.1 中的配置。设 b 为另外一个配置, 其中 $b(1)=C$, $b(2)=D$, $b(3)=A$, $b(4)=B$ 。序号为 1、2、3 的三个人相对于 a 分配给他们的房子更喜欢 b 分配给他们的房子, 而个人 4 在两个配置方案中分得的房子相同。因此, b 帕累

托优于 a , a 不是帕累托稳定的。

请注意,在假设没有人认为某两间房是无差异的情况下,如果不存在一个配置 b ,使得对于 a 和 b 分得的房子不同的个人来说,相对于 a 分配的房子更喜欢 b 分配的房子,那么 a 是帕累托稳定的。

评注

1. 术语。你以前可能见过“帕累托最优”(Pareto optimal)或“帕累托效率”(Pareto efficient)这两个术语。这些术语是“帕累托稳定”的别称。而本章我们之所以用“帕累托稳定性”这个术语,而不用其他两个,原因有二。首先,我们想要强调帕累托稳定性是一个均衡概念。能够推翻现有配置的力量只能是所有人达成的一致——同意用另一种配置来代替现在的配置。其次,我们想要使用一个中性的术语。一个帕累托稳定的配置可能是好的,也可能是坏的,可能是公平的,也可能不是公平的。模型中不包括在这些方面做出判断所需要的信息。
2. 帕累托稳定性的概念与能力无关。一个配置是否是帕累托稳定的,仅仅取决于该社会的特征,而非人与人之间的能力对比关系。
3. 另一个导致不稳定的潜在因素。帕累托稳定性暗含这样一个假设:如果一个配置帕累托优于另一个配置,那么后者将取代前者。这是一个强假设。如果配置 b 和 c 都帕累托优于 a ,对于某些人来说, b 优于 c ,而对于其他人来说, c 优于 b ,那么关于用哪个配置来替代 a 的问题,众人可能会存在分歧。帕累托稳定性概念暗含了一个假设:众人的分歧不会妨碍 a 被替代。

下面我们来证明:对于任意一个社会和任意的个人排序,由“依次称霸”程序产生的配置是帕累托稳定的。

命题 8.3: 由“依次称霸”程序产生的最终配置是帕累托稳定的

对于任意一个社会和任意一种个人的排列顺序,由“依次称霸”程序产生的配置都是帕累托稳定的。

证明: 设社会为 $\langle N, H, (\succsim^i)_{i \in N} \rangle$, 集合 N 中个人的排列顺序为 $i_1, i_2, \dots, i_n$ 。 a 表示在这个社会中按这个顺序由“依次称霸”程序产生的配置。也就是说, $a(i_1)$ 是 i_1 最偏好的房子, $a(i_2)$ 是 i_2 在 $H \setminus \{a(i_1)\}$ 中最偏好的房子,以此类推。

假设与命题 8.3 的结论相反: a 不是帕累托稳定的。于是,存在一个配置 b 使得对所有 $i \in N$ 都有 $b(i) \succsim^i a(i)$, 且对至少一个个人 $i \in N$ 有 $b(i) \succ^i a(i)$ 。在个人按 $i_1, i_2, \dots, i_n$ 排序的情况下,不妨设 i_r 是第一个满足 $b(i_r) \succ^{i_r} a(i_r)$ 的人。那么,如下图所示,对所有 $q < r$ 都有 $b(i_q) = a(i_q)$ 。

因此,对某人 $i_s (s > r)$, 有 $b(i_r) = a(i_s)$, 又因为 $b(i_r) \succ^{i_r} a(i_r)$, 因此可得 $a(i_s) \succ^{i_r} a(i_r)$, 而这与“依次称霸”程序相矛盾: 按照“依次称霸”程序, $a(i_r)$ 应该

$i:$	i_1	i_2	...	i_{r-1}	i_r	...	i_s	...	i_n
$a(i):$	■	■	...	■	■	...	■	...	■
$b(i):$	■	■	...	■	■	...	■	...	■

是除分配给 $i_1, i_2, \dots, i_{r-1}$ 的房子之外 i_r 最喜欢的房子。因此,这样的配置 b 是不存在的。

8.4 弱肉强食经济中的均衡和帕累托稳定性

现在,我们将均衡与帕累托稳定性的概念联系起来。均衡要求结果不受能力影响,而帕累托稳定要求在某个结果中不存在所有人都同意重新进行分配的情况。

命题 8.4: 每个弱肉强食经济的均衡都是帕累托稳定的

每个弱肉强食经济的均衡都是帕累托稳定的。

证明: 由命题 8.2 可知,每个弱肉强食经济都有唯一一个均衡。由命题 8.1 可知,这个均衡是依据能力对比关系采用“依次称霸”程序得到的。因此,根据命题 8.3,这个均衡是帕累托稳定的。

在 8.6 节,我们将证明命题 8.4 是否成立取决于一个假设——每个人只在意他自己所占用的房子。如果个人也在意其他人所占有的房子,那么这个弱肉强食经济的均衡就不是帕累托稳定的。

8.5 能控制个人能力对比关系的社会规划者实现的配置

假设社会规划者可以决定社会中个人之间的能力对比关系,但是无法直接决定房子的分配。我们还假设社会规划者相信,无论他选择怎样的能力对比关系,分配的结果都是弱肉强食经济的均衡。社会规划者可以得到哪些配置?确切来说,对于哪些最终配置 a ,存在一个能力对比关系使得 a 是一个弱肉强食经济的均衡?由命题 8.4 可知,每个弱肉强食经济的均衡都是帕累托稳定的,所以某些能力对比关系要想使得一个配置是一个均衡,其必要条件是这个配置是帕累托稳定的。现在,我们来证明这个条件实际上也是充分条件。也就是说,社会规划者如果选择一个合适的的能力对比关系,就可以得到一个帕累托稳定的配置。在证明这个结论的过程中,我们要用到以下引理。

引理 8.1: 帕累托稳定的配置和最喜欢的房子

在任意社会的每一个帕累托稳定的配置中,至少有一个人分到了他最喜欢的房子。

证明: 设 a 是社会 $\langle N, H, (\geq^i)_{i \in N} \rangle$ 中的一个配置,对每个 $i \in N$ 都有 $a(i) \neq h^*(i)$, 其中 $h^*(i)$ 是 i 最喜欢的房子。下面,我们将证明 a 不是帕累托稳定的。

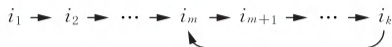
任意选择一个人 i_1 。根据我们的假设可知 $a(i_1) \neq h^*(i_1)$: i_1 没有分得他最喜欢的房子。也就是说, $h^*(i_1)$ 被其他人占有,假设被 i_2 占有,即 $a(i_2) = h^*(i_1)$ 。

同理, i_2 最喜欢的房子 $h^*(i_2)$, 也被除 i_2 外的其他人占有, 假设被 i_3 占有, 即 $a(i_3) = h^*(i_2)$ 。当然, $h^*(i_2)$ 也可能被 i_1 或其他人占有。

如果 $i_3 = i_1$, 则定义配置 b 为: $b(i_1) = a(i_2) = h^*(i_1)$, $b(i_2) = a(i_1) = h^*(i_2)$, 并且, 对除 i_1 和 i_2 外的其他人来说都有 $b(j) = a(j)$ 。也就是说, 将配置 a 中 i_1 和 i_2 的房子互换, 其余人的房子保持不变, 就得到了配置 b 。那么, i_1 和 i_2 相对于在 a 中分得的房子都更偏好在 b 中分得的房屋, 其余人在两个分配中分得的房子相同。因此, a 不是帕累托稳定的。

如果 $i_3 \neq i_1$, 则继续按上述方式构建一个序列, 使得对每个 k , i_k 最喜欢的房子 $h^*(i_k)$ 都是 $a(i_{k+1})$ (即 a 分给 i_{k+1} 的房子)。由于房子的集合是有限的, 所以一定有某个 $k \leq n$, 使得 $i_k = i_m$ ($m < k$)。

这个构建过程如下图所示。从 i_k 到 i_m 的箭头的表示 i_k 最喜欢的房屋是 a 分配给 i_m 的房子。



现定义一个配置 b 为: 对所有 $j = m, \dots, k-1$, 有 $b(i_j) = a(i_{j+1})$, $b(i_k) = a(i_m)$, 并且对其他 i 有 $b(i) = a(i)$ 。对于 $j = m, \dots, k$, 每个人 i_j 相对于在 a 中分得的房子都更偏好在 b 中分得的房子, 其余人在两个配置中分得的房子相同。因此, a 不是帕累托稳定的。

接下来我们要证明: 通过设定一个合适的能力对比关系, 社会规划者可以实现任何一个帕累托稳定的配置, 而且这个配置是唯一的均衡。

命题 8.5: 帕累托稳定的配置是某个能力对比关系条件下的均衡

设 a 是一个社会 $\langle N, H, (\geq^i)_{i \in N} \rangle$ 的帕累托稳定的配置。存在一个能力对比关系 $\triangleright$, 使得 a 是弱肉强食经济 $\langle N, H, (\geq^i)_{i \in N}, \triangleright \rangle$ 的唯一的均衡。

证明: 我们按以下方式构建能力对比关系 $\triangleright$ 。

由引理 8.1 可知, 至少有一个人分到他最喜欢的房子。设 i_1 是分到最喜欢的房屋的那个人。我们在构建能力对比关系 $\triangleright$ 时让 i_1 成为能力最强的人。

然后, 将 i_1 从个人的集合中删除, 将 $a(i_1)$ 从房子的集合中删除。也就是说, 此时社会中个人的集合为 $N \setminus \{i_1\}$, 房子的集合为 $H \setminus \{a(i_1)\}$ 。分配给集合 $N \setminus \{i_1\}$ 中个人的配置 a , 即配置 a' (对所有 $i \in N \setminus \{i_1\}$, 有 $a'(i) = a(i)$) 是一个更小的社会的帕累托稳定的配置。我们可以利用反证法推导这个结论。如果 a' 不是帕累托稳定的, 那么, 在中相对更小的社会中存在另一个配置 b' , 使得在这个社会中某些人在 b 中分得的房子比在 a' 中分得的房子更好, 且没有人在 b 中分得的房子比在 a' 中分得的房子更差。而在原来的社会中, b 被设定为 $b(i_1) = a(i_1)$, 且对所有 $i \in N \setminus \{i_1\}$ 都有 $b(i) = b'(i)$ 。不难理解, b 是帕累托优于 a 的, 而 a 在原来的社会中是帕累托稳定的, 二者之间存在矛盾。

已知 a' 在更小的社会中是帕累托稳定的, 由引理 8.1 可知, 至少有一个人 (假设为 i_2) 在 $H \setminus \{a(i_1)\}$ 中根据 a' 分得他最喜欢的房子。我们继续构建能力对比关

系 $\triangleright$, 让 i_2 成为能力第二强的人。

依此类推。在第 $(k+1)$ 阶段, 个人 i_{k+1} 分得在 $H \setminus \{a(i_1), \dots, a(i_k)\}$ 中他最喜欢的房子 $a(i_{k+1})$, 并且是能力第 $(k+1)$ 强的人。

按这种方式构建 $\triangleright$, 比起在 $\triangleright$ 中弱于他的人所分得的房子, 任意个人 i 都更偏好自己分得的房子。因此, a 是弱肉强食经济 $\langle N, H, (\geqslant_i)_{i \in N}, \triangleright \rangle$ 的一个均衡, 从而根据命题 8.2, 它是该弱肉强食经济唯一的均衡。

评注

假设你观察到一群占有了一些房子的人。你知道每个人的偏好 (因此你了解这个社会), 但你不知道这群人的能力对比关系。你可能想知道你观察到的这个配置是否是弱肉强食经济的一个均衡。为此, 你需要确认一下, 是否存在一个能力对比关系使得你观察到的配置是弱肉强势经济的一个均衡。

由命题 8.4 可知, 如果一个配置不是帕累托稳定的, 就一定不是均衡。另一方面, 根据命题 8.5 可知, 每个帕累托稳定的配置都是某个弱肉强食经济的均衡。因此, 如果观察到的配置中没有人想要占有比其更弱的人的房子, 那么, 这个配置一定是根据某个弱肉强食经济中的能力对比关系得到的。

8.6 外部性

在本节之前, 我们假设每个人只在意他自己所占有的房子。但是, 事实上, 人们可能不仅在意他们所占有的房子, 也在意其他人所分得的房子。例如, 人们一般会在意他们的邻居是什么样的人。人们可能还会关心别人的房子相对于其需求是否够用。此外, 他们可能还会考虑最终配置的公平性。例如, 有些人可能愿意接受每个人都获得其第二喜欢的房子的配置, 而不愿意接受自己得到最喜欢的房子而其他人得到他们很不喜欢的房子的配置。

经济学家将一个人的行为对其他人产生的影响称为外部性 (externality)。在本节, 我们把外部性考虑进来, 从而扩展弱肉强食模型。以下社会的定义与我们先前对社会的定义在两个方面有所不同: 第一, 个人的偏好是对配置集合的偏好, 而不是对房子集合的偏好; 第二, 不要求偏好为严格偏好。之所以假设非严格偏好, 是为了可以研究一些有意思的情况: 某些人只在意特定群体所占有的房子, 甚至可能只在意自己所占有的房子。如果两个配置只是在分给除特定群体之外的其他人的房子上有所不同, 那么这些人会认为这两个配置是无差异的。

定义 8.6: 存在外部性的社会

一个存在外部性的社会 $\langle N, H, (\geqslant^i)_{i \in N} \rangle$ 的包括:

个人

一个有限集合 N 。

房屋

一个有限集合 H , N 和 H 的数量相等。

偏好

任意个人 $i \in N$ 都有定义在配置集合上的偏好 $\succsim^i$ 。

具有外部性的弱肉强食经济与之前的弱肉强食经济仅有一点不同,即该社会中存在外部性。

定义 8.7: 存在外部性的弱肉强食经济

具有外部性的弱肉强食经济 $\langle N, H, (\succsim^i)_{i \in N}, \triangleright \rangle$ 包括具有外部性的社会 $\langle N, H, (\succsim^i)_{i \in N} \rangle$ 和能力对比关系 $\triangleright$, $\triangleright$ 是定义在个人集合 N 上的完备、可传递、非对称的双边关系。

尽管这个定义与我们之前对弱肉强食模型的定义类似,但定义中能力对比关系 $\triangleright$ 的含义有所不同。在弱肉强食模型中, $i \triangleright j$ 仅意味着 i 能占有原本由 j 占有的房子。在具有外部性的弱肉强食模型中, $i \triangleright j$ 意味着 i 不但能占有原本由 j 占有的房子,还能强迫 j 搬进原本由 i 占有的房子。 i 会将当前的最终配置与他和 j 交换房屋后的最终配置进行比较,从而决定是否进行这个交换。

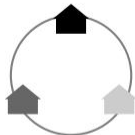
定义 8.8: 存在外部性的弱肉强食经济的均衡

存在外部性的弱肉强食经济 $\langle N, H, (\succsim^i)_{i \in N}, \triangleright \rangle$ 的均衡是这样的配置 a^* : 对任意个人 $i, j \in N$, 不存在 $i \triangleright j$ 且 $b \succ^i a^*$ 的情况。其中,配置 b 与 a^* 的差别是 $b(i) = a^*(j)$ 且 $b(j) = a^*(i)$ 。

以下两个例子表明,不存在外部性的弱肉强食经济的均衡的两个基本性质——存在性(命题 8.1)与帕累托稳定性(命题 8.4)——在存在外部性的弱肉强食模型中不成立。

例 8.3: 存在外部性的弱肉强食经济中不存在均衡

设 $N = \{1, 2, 3\}$, $H = \{\blacktriangle, \blacksquare, \blacklozenge\}$, 三个房子呈圆形排列,如下图所示。



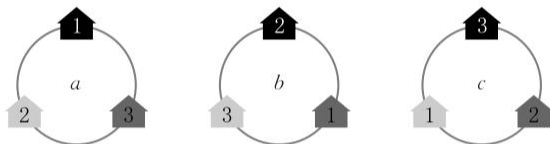
不妨设 $1 \triangleright 2 \triangleright 3$ 。在三种配置中,个人 1 最喜欢使其房子位于个人 2 的顺时针方向的下一处的那些配置,个人 2 最喜欢使其房子位于个人 1 顺时针方向的下一处的那些配置。

在均衡中,个人 1 的房子一定位于个人 2 房子的顺时针方向的下一处,因为如果个人 3 的房屋位于 2 的顺时针方向的下一处,那么个人 1 可以与能力弱于他的个人 3 交换房子,从而获得位于个人 2 的顺时针方向的下一个房子。同理,在均衡中,个人 2 的房子一定位于个人 1 的顺时针方向的下一处。但是,不可能存在这样的配置:个人 1 的房子位于个人 2 的顺时针方向的下一处且个人 2 的房子位于个人 1 的顺时针方向的下一处。因此,存在外部性的弱肉强食经济中不存在均衡。

例 8.4: 存在外部性的弱肉强食经济的均衡不是帕累托稳定的

本例子中的弱肉强食经济与例 8.3 相比仅在个人偏好方面有所不同。个人 1

最喜欢位于个人2顺时针方向的下一处的房子,个人2最喜欢位于个人3的顺时针方向的下一处房子,个人3最喜欢位于个人1的顺时针方向的下一处房子。而且,每个人都偏好使其顺时针方向邻居是其最喜欢的邻居的那些配置。如下图所示,在 a 、 b 、 c 三个配置中,每个人最喜欢的人都成了自己顺时针方向的邻居,而三个人最喜欢的配置都是 a ,其次是 b ,最后是 c 。



这三个配置都是均衡的,但 b 和 c 不是帕累托稳定的:因为这三个人相对于 b 和 c 都更偏好 a 。(存在外部性的弱肉强食经济的均衡不具有帕累托稳定性的另一例子,参见课后习题第6题。)

课后习题

- 包含非严格偏好的弱肉强食经济。假设在一个弱肉强食经济中有些人的偏好不是严格偏好,请证明以下结论。
 - 存在均衡,但不一定只有一个均衡。
 - 均衡可能不是帕累托稳定的。
- 比较静态分析。两个弱肉强食经济中的个人集合、房子集合和偏好都相同(也就是说,社会是相同的),但能力对比关系不同。能力对比关系的区别仅在于:有两个人互换了位置。请比较这两个弱肉强食经济的均衡。哪些人在这两个弱肉强食模型中一定会分得相同的房子? 互换位置的两个个人会受到什么影响? 其他人会受到什么影响?
- 可操作性。为避免不必要的冲突,弱肉强食经济中的所有人决定用计算机来计算均衡,且将接受计算机推荐的配置。在计算机中输入能力对比关系,并且每个人都在计算机中输入其偏好。然后,计算机开始计算均衡(给定个人输入的偏好关系)。最终,所有人都接受这个配置,按照它来分配房子。请证明:无论其他人输入的偏好是否真实,每个人对自己最有利的做法都是输入自己的真实偏好。
- 房子不足的弱肉强食经济。把之前的弱肉强食模型扩展一下,考虑房子数量少于人数的情况。在这种情况下,分配是从个人集合到集合 $H \cup \{\text{无家可归}\}$ 的函数,而且不存在将两人分配到同一房子的情况。每个人都有定义在集合 $H \cup \{\text{无家可归}\}$ 上的偏好排序。与之前的弱肉强食模型一样,仍然假设偏好关系是严格的;并且假设,相对于无家可归,人们更偏好随便分得一间房子。请为这个扩展模型定义一个均衡,并证明此模型一定存在均衡。
- 动态过程。弱肉强食经济 $\langle N, H, (\succsim^i)_{i \in N}, \triangleright \rangle$ 的动态变化过程如下。

在第0期,所有房子都是闲置的,没有个人分到房子。

对任意的第 t 期 ($t \geq 0$), 给定每个人在第 t 期分得的房子, 在第 $(t+1)$ 期的分配方法如下: 在第 $(t+1)$ 期每个人分到的房子, 是在第 t 期结束时在所有未分配出去的房子、分配给他的房子和分配给比他弱的人的房子里他认为最好的房子。对于每一个房子 h , 如果只有一个人选择 h , 则在第 $(t+1)$ 期结束时, 他将得到 h 。如果有不止一个人选择 h , 则这些人中能力最强的那个人得到 h , 而除他之外的其他人在第 $(t+1)$ 期结束时分不到任何房子。

请证明: 这个动态过程 (最迟在阶段 $|N|$) 收敛于弱肉强食模型 $\langle N, H, (\geq^i)_{i \in N}, \triangleright \rangle$ 的均衡。

- 看管奶油。一个组织包括 n 个工人和 n 个工作岗位, 且 $n \geq 3$ 。经理 (非工人) 给每个工人分配工作岗位。工人们经理的影响力不同。如果工人 i 对经理的影响力比工人 j 大, 则 i 能说服经理调换 i 和 j 的工作岗位。一个工人的呢称是“猫”, 他对经理的影响力最小。组织中的工作岗位按地位高低排序为, $h_1, h_2, \dots, h_n$, 每个人都希望得到地位尽量高的工作岗位。

然而, 这里有个小麻烦。地位最高的工作岗位 h_1 是“看管奶油”。如果把这个工作岗位给叫“猫”的工人, 而不是给其他人, 大家都会获益。因此, 每个人都愿意做出让步, 得到的工作岗位比原本按对经理的影响力所能得到的工作岗位的地位低一档 (只低一档), 目的是让“猫”来看管奶油。

(1) 请找出这个存在外部性的弱肉强食经济的均衡。

(2) 请解释一下为什么这个均衡不是帕累托稳定的。

- 帕累托不稳定和成对交换。请设想出一个社会, 在这个社会中存在这样一种配置: 该配置虽然不是帕累托稳定的, 但没有任何两个人想要互换房子。
- 唯一的帕累托稳定的配置。只有一个帕累托稳定的配置的社会, 具有哪些特征?
- 多数人同意。帕累托稳定有另外一种定义: 当且仅当大多数人都认为 $b(i) \succ^i a(i)$ 时, b 才帕累托优于 a 。请设想出一个社会, 在该社会中没有任何一个配置具有这个意义上的帕累托稳定性。
- 与强人为邻。设 $N = \{1, 2, \dots, 2k\}$, 其中 $1 \triangleright 2 \triangleright \dots \triangleright 2k$, 且 $H = \{1a, 1b, 2a, 2b, \dots, ka, kb\}$ 。每个人都可以强迫弱于他的人与自己互换房子。房子 ma 和 mb ($m = 1, \dots, k$) 相邻。每个人都对 (h, j) 有偏好关系, 其中 h 是他自己所占有的房子, j 是相邻房子的居住者 (他的邻居)。
假设当且仅当 j 比 j' 更强时, 相对于 (h', j') 个人更偏好 (h, j) 。也就是说, 个人仅关注其邻居的能力, 而不关注自己所居住的房子。这个弱肉强食经济的均衡是帕累托稳定的吗?

本章说明

本章内容以 Piccione 和 Rubinstein (2007) 以及 Rubinstein (2012, Chapter 3) 为基础。

► 9

市场

在第8章的模型中,社会包括个人的集合和房子的集合;每个房子只能住一个人,每个人只能占有一个房子。不同的人对房子有不同的偏好,但是相对于无家可归人们更偏好住在任意一个房子里。

与第8章不同,我们在本章假设房子的所有权受到承认和保护。每个房子最初都是由某人所拥有。只有作为房子所有者的双方都同意才能交换房子,任何人都不能强迫其他人让出房子。

本章的模型让我们可以把价格包括进来。价格可以引导人们交换房子的行为,直到实现没有人自愿交换房屋的配置。

9.1 模型

对社会的定义详见第8章。特别要注意,我们仍然假设每个人只在意他自己占有的房子,而不在意他人占有的房子。此外,为简化分析,我们假设偏好是严格的,没有人认为某两间房是无差异的。

在本章,我们将研究一个市场模型,该模型与弱肉强食模型的区别在于:房子的所有权取代了能力;初始所有权格局取代了能力对比关系。市场由社会和初始配置 e 构成, $e(i)$ 是个人 i 最初拥有的房子。

定义 9.1:市场

市场 $\langle N, H, (\succsim^i)_{i \in N}, e \rangle$ 包括社会 $\langle N, H, (\succsim^i)_{i \in N} \rangle$ 和初始配置 e ,后者表示所有房子的初始所有权。

例 9.1 假设市场为 $\langle N, H, (\succsim^i)_{i \in N}, e \rangle$,其中 $N=\{1, 2, 3, 4\}$, $H=\{A, B, C, D\}$,个人的偏好和初始配置如下表所示。每一列表示一个人的偏好顺序,个人最偏好的房子位于每列的第一行,初始配置已被突出显示出来。

个人			
1	2	3	4
B	A	A	A
C	B	C	D
D	C	D	B
A	D	B	C

个人1最初拥有房子A,但房子A是他最不喜欢而其他三人最喜欢的房子。因此每个人都想和个人1互换房子A。个人2可以提供给个人1最好的交换对象,因为个人2最初拥有房子B,房子B是个人1最喜欢的房子。因此我们预测,个人1和个人2之间应该会互换房子。

例 9.2 假设有一个市场如下表所示:

个人			
1	2	3	4
D	A	A	B
C	D	C	C
A	C	D	D
B	B	B	A

个人1和个人3想要互换房子,个人2和个人4也想要互换房子,经过这两次交换可以得到以下左侧表格的配置(由加粗字体标出)。这两次交换完成后,没有两个人愿意互换房子。

个人			
1	2	3	4
D	A	A	B
C	D	C	C
A	C	D	D
B	B	B	A

个人			
1	2	3	4
D	A	A	B
C	D	C	C
A	C	D	D
B	B	B	A

另一种可能的交换结果如右表所示。右表的最终配置可能是由个人1、2和4之间相互交换房子后得到的。可能的情况是:个人1先将他的房子A与个人2交换,个人1得到房子B,然后个人1再用房子B与个人4交换。在第一次交换后,个人1拥有房子B,虽然房子B是他最不喜欢的,但是他知道随后他可以用房子B与个人4交换得到房子D,它是个人1最喜欢的房子。

市场均衡

本章的核心概念是市场均衡。在均衡中,每个房子都被赋予一个值,这个值可以看作房子的价值或价格。每个人都可以用其最初拥有的房子来交换价格相等或价格更低的房子。均衡需满足两个条件:首先,每个人在价格等于或小于其最初拥有的房子中选择最喜欢的房子;其次,结果是和谐的,也就是说,所有人的自由选择产生出一个配置,在这个配置中,每个房子只被一个人拥有。

定义 9.2: 市场均衡

市场 $\langle N, H, (\succsim^i)_{i \in N}, e \rangle$ 的一个均衡为 (p, a) , 其中:

- p 为价格体系,它是一个函数,给每个房子 $h \in H$ 赋值 $p(h)$ (价格)。

● a 是一个分配方法,它使得:

人们做出的选择是最优的:

对于每个人 $i \in N$, $a(i)$ 是在预算集 $\{h \in H: p(h) \leq p(e(i))\}$ 中个人 i 的偏好程度 $\geq^i$ 最高的房子:

对于所有满足 $p(h) \leq p(e(i))$ 的房子 $h \in H$, 都有 $a(i) \geq^i h$

具有可行性:

a 是一个最终配置。

请注意这个定义的呈现方式,这是一种常见的界定方式。首先,我们指出可能的均衡的本质属性,具体包括价格系统和分配方式两个方面。然后,我们指出要成为均衡所需满足的条件。

例 9.3 接例 9.2。第一组交换完成后出现的配置 $a = (C, D, A, B)$ 并不是市场均衡的结果,证明如下。如果存在价格系统 p 使得 (p, a) 是一个均衡,那么 $p(A) = p(C)$ 一定成立,因为: C 必须在个人 1 的预算集中,即 $p(C) \leq p(A)$; 同时, A 必须在个人 3 的预算集中,即 $p(A) \leq p(C)$ 。同理可得, $p(B) = p(D)$ 。但是,如果 $p(A) \geq p(D)$, 那么个人 1 会选择其最喜欢的房子 D , 而不是 C ; 如果 $p(A) < p(D) = p(B)$, 那么个人 2 会选择房子 A , 而不是 D 。因此,不存在价格系统 p 使得 (p, a) 是一个市场均衡。

第二组交换后出现的最终配置 $b = (D, A, C, B)$ 是市场均衡的结果,其价格系统 p 满足 $p(A) = p(B) = p(D) > p(C)$ 。(事实上,由命题 9.5 可知, b 是该市场中唯一一个均衡配置。)

例 9.4: 所有人偏好相同的市场

假设在一个市场 $\langle N, H, (\geq^i)_{i \in N}, e \rangle$ 中, 所有人都有相同的偏好关系: 对所有 $i \in N$, 都有 $\geq^i = \geq$ 。设 p 是价格系统, 它反映了偏好关系 $\geq$: 对任意房子 h 和 h' , 当且仅当 $h \succ h'$ 时, 有 $p(h) > p(h')$ 。(可以用第 1 章的术语表述为, p 是表示 $\geq$ 的效用函数。)此时, (p, e) 是一个均衡, 这是因为: 分配 e 是一个配置; 个人 i 的预算集包括房子 $e(i)$ 和比 $e(i)$ 偏好程度更低的所有房子, 于是, 在这个预算集中个人 i 最偏好的房子是 $e(i)$ 。请注意, 对所有的个人 i , 均衡的配置 a 都满足 $a(i) \geq e(i)$, 因此 $a = e$ 。

如果每个人最喜欢的房子不同, 那么均衡给每个房子所赋的价格都相同。

例 9.5: 个人最喜欢的房子不同的市场

假设在一个市场 $\langle N, H, (\geq^i)_{i \in N}, e \rangle$ 中, 每个人最喜欢的房子不同。如果价格系统 p 给所有房子所定价格相同, 并且对每个人 i 而言 $a(i)$ 都是 i 最喜欢的房子, 那么 (p, a) 就是一个均衡。在这个价格系统下, 所有人的预算集都等于 H , 使得每个人都可以选择自己最喜欢的房子; 没有任意两个人最喜欢的房子相同, 故 a 是一个配置。事实上, 在任意一个均衡配置 a 中, 每个人都会得到其最喜欢的房子。可以用反证法证明这个结论。令 h^* 为集合 $\{h \in H: h \text{ 不是个人 } i \text{ 最喜欢的房子}, a(i) = h\}$ 中最贵的房子, i^* 是那个拥有房子 h^* 的人, 即 $a(i^*) = h^*$ 。这意味

着 i^* 最喜欢的房子不比 h^* 贵,也就是说,如果他能付得起 $a(i^*)$,他也能付得起他最喜欢的房子,因此,在这个人的预算集中,对 i^* 而言, $a(i^*)$ 不是其最优选择。这与假设相矛盾。

评注

1. 请注意,均衡的概念不要求人们知道其他人的偏好。在做出选择之前,每个人只需要清楚价格系统就行了。

2. 均衡的概念是静态的。如果社会处于均衡状态,就没有理由进行重新分配。我们不具体讨论未处于均衡状态的社会逐渐趋于均衡的过程。

每个配置都可以通过一系列交易循环(trading cycle)转换成另一个配置,交易循环是指个人之间的房子轮换。

例如,在例 9.2 中,配置由 (A, B, C, D) 转变为 (C, D, A, B) 可以通过如下交易实现:个人 1 与个人 3 交换房子,个人 2 与个人 4 交换房子。在这种情况下,一个交易循环就是一次两两之间的交换,我们将两个交易循环表示为 $(1, 3)$ 和 $(2, 4)$ 。

换个例子,配置由 (A, B, C, D) 转变为 (D, A, C, B) 可以通过如下交易实现:个人 1、2、4 同意交换其最初拥有的房子,最终个人 1 得到个人 4 的房子,个人 4 得到个人 2 的房子,个人 2 得到个人 1 的房子,而个人 3 仍持有其最初的房子。我将这两个交易循环表示为 $(1, 4, 2)$ 和 (3) 。请注意,交易循环 $(1, 4, 2)$ 也可以这样产生:个人 1 先与个人 4 交换,得到配置 (D, B, C, A) ,然后个人 4(现在得到房子 A)再与 2 交换。

抽象地说,交易循环指的是由若干个人构成的一个序列 $(i_1, \dots, i_k)$,它表示(在这些个人同时交换房子或分别两两交换房子之后) i_j 得到 i_{j+1} 最初拥有的房子,其中 $j=1, \dots, k-1$,而 i_k 得到 i_1 最初拥有的房子。如果一个交易循环仅包括一个人,比如 (i_1) ,意为这个人仍持有其最初拥有的房子。

定义 9.3:交易循环和交易分拆

在市场 $\langle N, H, (\geq^i)_{i \in N}, e \rangle$ 中的交易循环是指由不同的个人(N 中的元素)所构成的有限序列。交易分拆(trading partition)指的是由若干个交易循环所组成的集合,它使得集合 N 中每个人都恰好属于一个交易循环。交易分拆 $\{(i_1^1, \dots, i_{k_1}^1), \dots, (i_1^m, \dots, i_{k_m}^m)\}$ 将配置 a 转变为配置 b ,其中对于每个 $j=1, \dots, m$,满足:当 $l=1, \dots, k_j-1$ 时, $b(i_l^j) = a(i_{l+1}^j)$;并且 $b(i_{k_j}^j) = a(i_1^j)$ 。

下面我们将证明:对任意一对配置,一定存在唯一一个交易分拆可将其中一个配置转换成另一个配置。

引理 9.1:将一个配置转变成另一个配置的交易分拆是唯一的

对于市场中任意两个配置 a 和 b ,存在唯一的一个交易分拆可将配置 a 转换成配置 b 。

证明: 我们可以用归纳法构造交易分拆 T 。从任意一个人 i_1 开始。如果 $b(i_1) = a(i_1)$,则将这个(退化的)交易循环 (i_1) 加进 T ;否则,令 i_2 为满足 $a(i_2) =$

$b(i_1)$ 的个体。如果 $b(i_2)=a(i_1)$, 则将交易循环 (i_1, i_2) 加进 T ; 否则, 令 i_3 为满足 $a(i_3)=b(i_2)$ 的个体, 以此类推, 直到 i_k 满足 $b(i_k)=a(i_1)$; 由于个人的数量是有限的, 所以 i_k 一定存在。然后将交易循环 $(i_1, i_2, \dots, i_k)$ 加进 T 。

在经过以上的交易循环后, 如果仍有人未参与交换, 那么在这些人中再任选一人, 重复以上过程。直到每个人都是 T 中某个交易循环中的一个人。因为这样的构造规则, T 可以将配置 a 转换为配置 b , 因为没有人在 T 所含的交易循环中出现的次数大于 1。由于对任意个人 i , 存在唯一的一个人 j 满足 $b(j)=a(i)$, 因此, T 是唯一一个可将配置 a 转换成配置 b 的交易分拆。

我们接下来要证明: 对任意一个均衡配置 a , 将初始配置 e 转换成配置 a 的交易分拆中的每个交易循环里的所有人最初拥有的房子的价格都相同。

命题 9.1: 通过交易将初始配置转换成均衡

令 (p, a) 为市场 $\langle N, H, (\geq^i)_{i \in N}, e \rangle$ 的均衡。将初始配置 e 转换成均衡配置 a 的交易分拆中的每个交易循环里的所有人最初拥有的房子的价格都相同。

证明: 不妨设 $(i_1, \dots, i_k)$ 是将初始配置 e 转换成均衡配置 a 的交易分拆中的一个交易循环 (详见引理 9.1 的证明)。那么, 对 $l=1, \dots, k-1$ 有 $a(i_l)=e(i_{l+1})$, 并且 $a(i_k)=e(i_1)$ 。因此, 当 $l=1, \dots, k-1$ 时, $e(i_{l+1})$ 必须在 i_l 的预算集内, 即 $p(e(i_l)) \geq p(e(i_{l+1}))$; $e(i_1)$ 必须在 i_k 的预算集内, 即 $p(e(i_k)) \geq p(e(i_1))$ 。因此, 有 $p(e(i_1)) \geq p(e(i_2)) \geq \dots \geq p(e(i_k)) \geq p(e(i_1))$, 显然, 只有在交易循环 $(i_1, \dots, i_k)$ 中所有人最初拥有的房子的价格相同的时候这个式子才会成立。

9.2 市场均衡的存在和构建

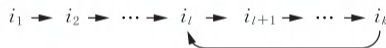
接下来, 我们要证明每个市场都有一个均衡。事实上, 我们将说明如何构建一个均衡。均衡的构建涉及一系列交易循环。我们首先确定一个交易循环, 该交易循环中的每个人都得到了自己最喜欢的房子。我们称这样的交易循环为最优交易循环 (top trading cycle)。

定义 9.4: 最优交易循环

如果对于 $l=1, \dots, k$, i_l 最喜欢的房子最初由 i_{l+1} 拥有, 而 $i_{k+1}=i_1$, 那么这个市场 $\langle N, H, (\geq^i)_{i \in N}, e \rangle$ 中的交易循环 $(i_1, \dots, i_k)$ 就被称为最优交易循环。也就是说, 对所有 $l=1, \dots, k$ 和 $h \in H$, 都有 $e(i_{l+1}) \geq^i h$ 。

如何找到一个最优交易循环? 步骤如下。首先, 随意选择一个人, 比如 i_1 。如果 i_1 最初拥有的房子就是其最喜欢的房子, 那么 (i_1) 就是一个 (退化的) 最优交易循环; 否则, 不妨设 i_2 最初拥有的房子是 i_1 最喜欢的房子。如果 i_2 最初拥有的房子就是自己最喜欢的房子, 那么 (i_2) 就是一个最优交易循环。如果 i_1 最初拥有的房子是 i_2 最喜欢的房子, 那么 (i_1, i_2) 就是一个最优交易循环; 否则, 不妨设 i_3 最初拥有的房子是 i_2 最喜欢的房子。以此类推, 在第 k 步检查个人 k 最喜欢的房子

的主人是否在序列 $(i_1, \dots, i_k)$ 中,比如 i_l 。如果个人 k 最喜欢的房子的主人在序列 $(i_1, \dots, i_k)$ 中,那么 $(i_1, \dots, i_k)$ 就是一个最优交易循环;否则,在这个序列中再加入个人 k 最喜欢的房子的主人 i_{k+1} 。由于个人的数量是有限的,通过上述就可以确定一个最优交易循环。这个步骤如下图所示,从 i 到 j 的箭头意味着 j 是 i 最喜欢的房子的主人。接下来,我们要给出一个较为正式的表述。



程序 9.1:最优交易循环的寻找程序

在市场 $\langle N, H, (\geq^i)_{i \in N}, e \rangle$ 中,按以下归纳程序可找到一个最优交易循环。

初始值

任意选择一个人 $i_1 \in N$,并定义序列 (i_1) 。

归纳步骤

设 $(i_1, \dots, i_k)$ 是第 k 步得到的 N 中若干个人组成的序列,对于 $l=1, \dots, k-1$, $e(i_{l+1})$ 是 i_l 最喜欢的房子。

- 如果 i_k 最喜欢的房子的主人(比如 i_l)在序列 $(i_1, \dots, i_k)$ 中,则停下,序列 $(i_1, \dots, i_k)$ 就是一个最优交易循环。
- 否则,在序列中加入 i_k 最喜欢的房子的主人 i_{k+1} ,得到序列 $(i_1, \dots, i_k, i_{k+1})$,此时,对于 $l=1, \dots, k$, $e(i_{l+1})$ 是 i_l 最喜欢的房子,然后继续之前的步骤。

请注意,这个程序初始值设定为任意一个人。初始设定的这个人可能会对最终找到什么样的最优交易循环有影响。比如,如果个人 i 最初就拥有自己最喜欢的房屋,个人 j 拥有个人 k 最喜欢的房屋,个人 k 拥有个人 j 最喜欢的房屋。那么,如果初始设定时选了个人 i ,找到的最优交易循环就是(退化的)交易循环 (i) ;如果初始设定时选了个人 j ,找出来的最优交易循环就是 (j, k) 。

现在我们提出一个产生市场均衡的迭代程序。在这个迭代程序中,首先是要找到市场中的一个最优交易循环,给这个交易圈中所有人最初拥有的房子随意确定一个价格(假设为 p_1),且分配给他们最喜欢的房子(即这个交易循环中下一个人所拥有的房子)。然后,将这个最优交易循环中的所有人(和他们最初拥有的房子)全部移出市场。接下来,在这个略小一点的市场中再找一个最优交易循环,给这个交易循环中所有人最初拥有的房子确定随意一个价格 p_2 ($p_2 < p_1$),且分配给每个人在剩余的房子中其最喜欢的房子。然后,再将这个交易循环中的所有人全部移出市场,产生一个更小一点的市场。以此类推,直到市场中没有人剩下为止。

程序 9.2:最优交易程序

市场 $\langle N, H, (\geq^i)_{i \in N}, e \rangle$ 中的最优交易程序如下。首先,对任意集合 $N' \subseteq N$,定义 $M(N')$ 为个人集合 N' 所属的市场, H' 由 N' 中的那些人最初拥有的房子组成, N' 中的个人对 H' 的偏好关系与他们在市场 $\langle N, H, (\geq^i)_{i \in N}, e \rangle$ 中对 H' 的偏好关系相同, N' 中的那些人最初的房子与在 $\langle N, H, (\geq^i)_{i \in N}, e \rangle$ 中最初拥

有的房子也相同。

初始化

首先,设定个人的集合 $N_0 = N$, 且 $p_0 > 0$ 。

归纳步骤

对任意一个集合 $N_s \subseteq N$, 在市场 $M(N_s)$ 中找到一个最优交易循环, 用 I_s 表示这个交易循环中个人的集合。

给 I_s 中所有人最初拥有的房子的价格赋值为 p_s , 且 $0 < p_s < p_{s-1}$; 给 I_s 中每个人都分配其在 $M(N_s)$ 中最喜欢的房子(即在这个最优交易循环中排在他后面的人最初拥有的房子)。

令 $N_{s+1} = N_s \setminus I_s$ 。如果 $N_{s+1} = \emptyset$, 则终止归纳程序; 否则, 继续对 N_{s+1} 应用以上归纳步骤。

这个程序会产生一个价格系统和一个最终配置。

正如我们之前提到的, 一个市场可能包括不止一个最优交易循环, 所以在最优交易程序中, 如果选择了不同的最优交易循环, 可能会产生不同结果。下面我们证明, 每个最优交易程序的结果都是市场均衡。

命题 9.2: 市场均衡的存在性

每个市场都有一个均衡; 任意一个由最优交易程序产生的分配方案和价格系统的组合都是一个均衡。

证明: 由最优交易程序产生的分配方案和价格系统之所以是一个均衡, 是因为: (1) 在这个程序中每个房子都仅被分配了一次, 因此得到的是一个配置; (2) 每个人所分得的房子都是在所有价格小于等于其最初拥有的房子中他最喜欢的。

例 9.6 在例 9.1 的市场中, 最优交易程序的操作如下。整个市场中有一个最优交易循环(1, 2)。我们将个人 1 和个人 2 最初拥有的房子(即 A 和 B)的价格定为 p_1 , 且分配给个人 1 和个人 2 其最喜欢的房子($a(1) = B$, $a(2) = A$), 然后将个人 1 和个人 2 移出市场。

在将个人 1 和个人 2 移出市场后形成的更小的市场中, 有两个最优交易循环(3)和(4)。如果我们选择(3), 那么就将个人 3 最初拥有的房子 C 的价格赋为 $p_2 < p_1$, 并将房子 C 分配给个人 3, 然后将个人 3 移出市场。

在将 3 再移出市场后形成的更小的市场中仅剩个人 4, 且只有一个最优交易循环(4)。所以, 我们将个人 4 最初拥有的房子 D 的价格赋为 $p_3 < p_2$, 并且将房子 D 分配给个人 4。

这样的 (p, a) 是该市场的均衡, 其中配置为 (B, A, C, D) , 价格系统 p 满足 $p(D) < p(C) < p(A) = p(B)$ 。

如果我们在第二步选择 4 而不是 3, 那么产生的配置仍为 (B, A, C, D) , 但价格系统 p 为 $p(C) < p(D) < p(A) = p(B)$, 因此 (p, a) 也是这个市场的均衡。

例 9.7 在例 9.2 的市场中, 最优交易程序的操作如下。整个市场中唯一的最优交易循环是(1, 4, 2)。我们将个人 1、2、4 最初拥有的房子的价格定为 p_1 , 且

分配给这三个人其最喜欢的房子($a(1)=D$, $a(2)=A$, 且 $a(4)=B$), 然后将这三个人移出市场。

在将个人 1、2、4 移出市场后, 市场中仅剩个人 3, 而在更小的市场中只有一个最优交易循环(3)。我们将个人 3 最初拥有的房子 C 的价格定为 $p_2 < p_1$, 将房子 C 分配给个人 3。

与例 9.2 中的结果一样, 由 (D, A, B, C) 和价格系统 p 组成的配置是该市场的均衡, 其中价格系统 p 满足 $p(C) < p(A) = p(B) = p(D)$ 。

命题 9.2 并未宣称由最优交易程序所产生的均衡是唯一的, 实际上, 不同均衡的价格系统可能会有所不同(如例 9.6 所示)。但是, 在以上两个例子中, 由最优交易程序所得到的均衡配置是唯一的, 这个性质具有普遍性: 每个市场都仅有一个均衡配置。这个性质的证明比本章中的其他证明更为复杂, 我们稍后会在命题 9.5 中再来讨论。

如果 $p(e(i)) > p(e(j))$, 我们称个人 i 比个人 j 更富有, 因为个人 j 能买得起的房子个人 i 都能买得起, 而且至少有一个房子是个人 i 买得起但个人 j 买不起的。那么, 是什么使得一个人比别人更富有? 直觉告诉我们, 决定个人 i 是否富有的一个重要因素是: 个人 i 最初拥有的房子是多少人最喜欢的房子。喜欢个人 i 的房子的人越多, 个人 i 就越可能出现在例 9.2 中较早阶段的最优交易循环中, 于是, 个人 i 的房子价格就越高。但是, 由其他个人对个人 i 的房子进行排序并非是决定其财富的唯一因素。个人 i 最初拥有的房子可能是很多人最喜欢的房子, 但是这些人最初拥有的房子可能没人喜欢。在这样的情况下, 即使有很多人喜欢个人 i 的房子, 个人 i 也未必会是相对富有的人。因此, 另一个可以使个人 i 的房子的市场价格更高的重要因素是: 喜欢个人 i 的房子的那些人最初拥有的房子有多大的吸引力。概括一下: 在这个模型中, 对房子的喜好协调一致会让一个人变得富有。例如, 对个人 i 和 j 而言, 如果个人 i 最喜欢的房子是个人 j 最初拥有的房子, 而且个人 j 最喜欢的房子也是个人 i 最初拥有的房子, 哪怕其他人并不怎么喜欢个人 i 和 j 最初拥有的房子, 这两个房子的均衡价格也可能会高于其他房子的均衡价格。

9.3 均衡和帕累托稳定性

在上一章中, 命题 8.4 证明了无外部性(个人仅在意自己占有的房子, 而不在意其他人占有的房子)的弱肉强食经济中的均衡是帕累托稳定的。本章模型的结论也与之类似。也就是说, 如果每个人仅在意自己占有的房子, 没有任何一个配置能使所有人的状况都至少和均衡配置一样好, 且使至少一个人的状况比均衡配置更好。

命题 9.3: 均衡配置的帕累托稳定性

在任意一个市场中, 每个均衡配置都是帕累托稳定的。

证明: 设 (p, a) 是市场 $\langle N, H, (\geq^i)_{i \in N}, e \rangle$ 的一个均衡。如果 a 不是帕累托稳定的, 那么存在某个配置 b , 使得对所有 $i \in N$ 都有 $b(i) \geq^i a(i)$, 且对某些 $i \in N$ 有 $b(i) >^i a(i)$ 。对于任何一个使 $b(i) >^i a(i)$ 成立的个人 i , 都有 $p(b(i)) > p(a(i))$ (否则, $p(b(i)) \leq p(a(i)) = p(e(i))$), 这意味着 $a(i)$ 不是个人 i 在预算集 $\{h \in H: p(h) \leq p(e(i))\}$ 中最优的。对其他 i , 有 $b(i) = a(i)$ (因为每个人的偏好关系都是严格的), 于是有 $p(b(i)) = p(a(i))$ 。因此, 有 $\sum_{i \in N} p(b(i)) > \sum_{i \in N} p(a(i))$ 。但由于 a 和 b 都是配置, 所以不等式两边都等于 $\sum_{i \in N} p(e(i))$, 不等式不可能成立。因此, 不存在这样的配置 b , 配置 a 是帕累托稳定的。

该结论和与其他经济模型中类似的结论通常被称为“福利经济学第一定理”。但是, 命题 9.3 仅证明均衡是帕累托稳定的, 这一概念实际上与福利无关。我们在这里仅仅设定了个人的偏好顺序, 跟平时人们所说的福利的度量没有必然联系。命题 9.3 讲的是, 对于任意一个均衡配置, 不存在另外一个配置, 使得对所有人来说都至少和均衡配置一样好, 且至少对一个人来说比均衡配置更好。但可能存在这样的配置, 使得对大多数人甚至是除了某一人之外的所有人来说比均衡配置更好。因此, 我们不用“福利经济学第一定理”来称呼命题 9.3。

由命题 9.3 可以推出, 如果初始配置不是帕累托稳定的, 那么实现均衡配置都需要进行交易: 至少会有两个人交易他们的房子。下面我们证明, 相反地, 如果初始配置是帕累托稳定的, 那么均衡不需要房屋交换。

命题 9.4: 帕累托稳定的配置中没有交易

设市场为 $\langle N, H, (\geq^i)_{i \in N}, e \rangle$ 。如果 e 是帕累托稳定的, 那么对任意市场均衡 (p, a) , 都有 $a = e$ 。

证明: 设 (p, a) 是市场均衡。给定价格系统 p , $e(i)$ 在个人 i 的预算集中, 故对所有个人 $i \in N$, 都有 $a(i) \geq^i e(i)$ 。如果 $a \neq e$, 那么对某个个人 i 有 $a(i) >^i e(i)$, e 就不是帕累托稳定的, 与假设矛盾。

由命题 9.3 和命题 9.4 可得出结论: 如果在第 1 日市场开始交易并形成均衡配置, 然后第 2 日市场重开, 且第 2 日的初始配置等于第 1 日结束时的均衡配置, 那么第 2 日的均衡市场中不会有交易。

对命题 9.4 的解释与我们在弱肉强食模型中对命题 8.5 的解释类似。我们对命题 8.5 的解释为: 在社会中控制能力对比关系且清楚个人偏好的社会规划者, 通过设定恰当的能力对比关系, 就能得到任意的帕累托稳定配置, 且这个配置是一个市场均衡。对命题 9.4 的解释与之类似。假设社会规划者或者管理者可以分配初始所有权, 但不能阻止个人之间进行市场交易。如果市场交易根据我们所提出的均衡的概念进行, 则社会规划者或者管理者可以通过合理分配初始所有权来得到任意的帕累托稳定配置。这样来看, 市场模型中的所有权与弱肉强食模型中能力的作用是一样的。

命题 9.4 通常被称为“福利经济学第二定理”。但我们尽量不这样称呼, 因为我们认为“福利”一词对于命题 9.3 是不太合适的。

9.4 市场均衡的唯一性

经济模型中均衡的唯一性是很有用的,因为这意味着模型结果的范围变得相对小了,对模型中参数变化所产生的影响的分析也会变得相对简单。

如例 9.6 所示,市场均衡中房子价格的高低排序未必是唯一的。但下面我们要证明,每个市场都只有唯一一个均衡配置。这个结论依赖于一个重要假设:没有人认为任意两个房子是无差异的(详见课后习题第 7 题)。

命题 9.5:均衡的唯一性

每个市场都有唯一的均衡配置。

证明:假设与命题 9.5 相反,市场 $\langle N, H, (\geq^i)_{i \in N}, e \rangle$ 中有两个均衡 (p, a) 和 (q, b) , 且 $a \neq b$ 。设个人 i_1 最初拥有的房子 $e(i_1)$ 的价格最高。设 $(i_1, i_2, \dots, i_{k*})$ 是将 e 转换为 a 的交易分拆中的一个交易循环。由命题 9.1 得,对所有个人 $i \in I = \{i_1, i_2, \dots, i_{k*}\}$, $p(e(i))$ 是相同的,所以每个房子都在个人 $i \in I$ 的预算集中,因此,对任意个人 $i \in I$, $a(i)$ 都是个人 i 在 H 中最喜欢的房子。

我们再来看均衡 (q, b) 。在不失一般性的情况下,设 $e(i_1)$ 是 $\{e(i): i \in I\}$ 中价格最高的房子。也就是说,对所有 $i \in I$, 都有 $q(e(i_1)) \geq q(e(i))$ 。由于 $e(i_2) = a(i_1)$ 是 i_1 在 H 中最喜欢的房子,在均衡 (q, b) 中,个人 i_1 分得房子 $e(i_2)$, 即 $b(i_1) = e(i_2)$ 。由命题 9.1 得, $q(e(i_2)) = q(e(i_1))$, 因此,在 $\{e(i): i \in I\}$ 中的个人 i_2 拥有的房子在价格系统 q 中也是最贵的。以此类推,最终可以发现 $(i_1, i_2, \dots, i_{k*})$ 也是将 e 转换为 b 的交易分拆中的一个交易循环。

现从个人集合和房子集合中删除此交易循环中的个人及其最初拥有的房子。我们得到一个更小的市场以及这个市场的两个均衡。原因是,在删除这些房子和个人之前,每个人都选择了在均衡价格下他能够买得起的最好的房子,那么删除他们没有选择的房子不会影响其选择的最优性。因此,我们可以在这个更小的市场中继续以上步骤,并且再次找出在价格体系 p 中价格最高的交易循环。

以此类推,最后可以发现将 e 转换为 a 的交易分拆与将 e 转换为 b 的交易分拆是相同的,因此有 $a = b$ 。

如果想更正式地证明这个结论,我们可以采用归纳法。如果市场中只有一个人,自然只有一个均衡配置。如果少于或等于 $(n-1)$ 个人的市场中仅有一个均衡配置,那么 n 个人的市场也只有一个均衡配置。

课后习题

1. 非帕累托稳定配置的交易。请证明:如果一个配置不是帕累托稳定的,那么存在一些个人组成的(非空的)集合,在这个集合中的个人可以相互交易其拥有的房子,使得集合中的所有人在交易后都感觉更好。

2. 市场的例子。

- (1) 如果市场中某人最初拥有的房子就是其最喜欢的房子。请证明：在市场均衡中，这个人所分得的房子就是其最初拥有的房子。
- (2) 如果市场均衡中每个房子的价格不同，这个市场的均衡配置有什么特点？
- (3) 请证明：在任意一个与下表一致的市场的均衡中，个人 4 都分得其最喜欢的房子。

个人	1	2	3	4
最初配置	<i>D</i>	<i>C</i>	<i>B</i>	<i>A</i>
最喜欢的房子	<i>A</i>	<i>A</i>	<i>D</i>	?

3. 去除一个人的影响。举一个市场的例子，如果把该市场中的一个人与其最初拥有的房子移出去，那么在剩下的人中，有一个人的情况变得更好，还有一个人的情况变得更差。
4. 个人偏好变化的影响。
 - (1) 设 M_1 为一个市场，且 (p, a) 是 M_1 的均衡。假设 M_2 和 M_1 的不同之处在于：个人 1 对在 M_2 中所得房子 $a(1)$ 的偏好程度比对在 M_1 中所得房子 $a(1)$ 的偏好程度更高。这两个市场中的均衡配置有什么差异？
 - (2) (难度提高) 在市场 M_1 中，个人 1 最初拥有房子 A 。 M_2 和 M_1 的不同之处在于：个人 2 在 M_2 中对房子 A 的偏好程度高于在 M_1 中对房子 A 的偏好程度。请证明：相对于在 M_1 的均衡中，个人 1 在 M_2 的均衡中的情况不会变得更差，甚至可能会变得更好。
5. 操纵。请解释一下，为什么如果个人的行为表现出的偏好与其真实偏好不同，他不会过得更好。也就是说，如果市场 M 和 M' 中仅仅是个人 i 的偏好有所不同，那么根据个人 i 在 M 中的偏好，在 M' 中的均衡配置不会优于在 M 中的均衡配置。
6. 核心(the core)。与帕累托稳定性一样，核心是一个表示稳定性的概念。如果在某个市场中，不存在这样一组个人，他们能够带着各自的初始房屋离开市场，并以任何方式(不一定与均衡状态一致)重新分配这些房屋，从而使所有人的状况都比在配置 a 中更好，那么配置 a 就处于该市场的核心。请证明：任何市场的均衡都处于其核心。
7. 存在无差异偏好的市场。本章中的某些结论依赖于一个重要假设：个人的偏好关系中不存在无差异的偏好。请构造一个存在无差异偏好的市场，在该市场中，某些均衡不是帕累托稳定的，且均衡配置不止一个。

本章说明

本章的模型来自 Shapley 和 Scarf(1974)，它证明了由 David Gale 提出的市场均衡的存在性。本章的详细论述借鉴了 Rubinstein(2012, Chapter 3)。

▶ 10

交换经济模型

在本章,我们将研究另外一种市场,该市场中的商品与前两章的房子不同:商品是可分割的,因此,我们可以消费任意数量的这些商品。与第9章一样,我们承认并保护商品的所有权。每个人最初拥有一个商品组合。我们试图找到商品在个人之间的一种分配方案和一个价格系统,在这个价格系统下,人们想要购买的每种商品的总量等于其他人想要出售的每种商品的总量,即每种商品的需求和供给相等。

10.1 模型

假设市场中有两种商品:商品1和商品2。我们可以购买任意(非负)数量的每种商品。和第4章一样,一个商品组合就是一对 (x_1, x_2) ,其中非负数 x_k 表示商品 k 的数量($k=1, 2$),所有的商品组合构成的集合为 $\mathbb{R}_+^2$ 。市场中的个人组成的集合表示为 N 。每个人 $i \in N$ 最初拥有的商品组合为 $e(i) = (e_1(i), e_2(i))$ 。我们不想研究最初的商品组合是如何决定的,因此假设个人最初拥有的商品组合是给定的,并假设所有人最初拥有的每种商品的数量都是正数(非零)。

每个人都仅关注其交易后拥有的商品组合。有些时候,我们称他“消费”这个商品组合。和前两章一样,我们假设无论自私还是利他,每个人都对其他人选择的商品组合都不感兴趣。因此,个人 i 的喜好可以用定义在可能的商品组合的集合 $\mathbb{R}_+^2$ 上的偏好关系来表示。我们假设这个偏好关系是单调的、连续的。

把以上各点结合起来,我们可以给出如下交换经济的定义。

定义 10.1: 交换经济

一个交换经济 $\langle N, (\succsim^i)_{i \in N}, e \rangle$ 包括:

个人

一个有限集合 N 。

偏好

每个人 $i \in N$ 都有定义在 $\mathbb{R}_+^2$ 上的一个单调且连续的偏好关系 $\succsim^i$ 。

初始配置

函数 e 给每个人 $i \in N$ 分配一个商品组合 $e(i) \in \mathbb{R}_+^2$,即个人 i 最初拥有的

商品组合, 且 $\sum_{i \in N} e_k(i) > 0 (k=1, 2)$ 。

评注

1. 交换经济模型与之前所讲的市场密切相关。在市场模型中, 每个房子都是一个不可分割的商品, 且一个房子里只能住一个人。在交换经济模型中, 每种商品都是可分割的, 且所有商品可以在个人之间任意分配。第 9 章的集合 H 类似于本章的集合 $\mathbb{R}_+^2$ 。
2. 实际上, 许多商品都是不可分割的。例如, 你可以拥有 4 把或 6 把椅子, 但不能拥有 5.3 把椅子。我们之所以假设商品是可分割的, 是因为这样可以在不显著影响结论的前提下简化分析。
3. 与前几章中的房子一样, 本章模型中每个人拥有的商品只能由自己消费, 不能跟别人免费分享, 而且, 每种商品都必须被分光。这种设定排除了像信息那种可以被很多人同时消费的商品。

10.1.1 价格和预算集

价格系统就是一对不等于 $(0, 0)$ 的非负数 $p = (p_1, p_2)$ 。给定价格系统 p , 商品组合 $x = (x_1, x_2)$ 的值为 $(p_1 x_1 + p_2 x_2)$, 也可以记作 px (向量 p 和向量 x 的内积)。个人 i 最初拥有的商品组合 $e(i)$ 的值为 $pe(i)$, 通过与其他人交换 $e(i)$ 中的部分或全部商品, 个人 i 可以获得任何价值 px 不超过 $pe(i)$ 的商品组合; 也就是说, 个人 i 可以获得任意一个满足 $px \leq pe(i)$ 的商品组合 x 。跟之前一样, 我们将满足 $px \leq pe(i)$ 的商品组合所构成的集合称为个人 i 的预算集, 表示为 $B(p, e(i))$ 。假设个人的偏好关系是单调的, 所以当且仅当商品组合是在预算约束线 $\{x \in \mathbb{R}_+^2 : px = pe(i)\}$ 上的最优组合时, 这个商品组合才是在个人 i 的预算集中的最优组合。

定义 10.2: 价格系统和预算集

价格系统是一对不等于 $(0, 0)$ 的非负数。根据价格系统 $p = (p_1, p_2)$, 商品组合 $x = (x_1, x_2)$ 的值为 $px = p_1 x_1 + p_2 x_2$; 在一个交换经济 $\langle N, (\geq^i)_{i \in N}, e \rangle$ 中, 给定价格系统 p , 个人 $i \in N$ 的预算集为:

$$B(p, e(i)) = \{x \in \mathbb{R}_+^2 : px \leq pe(i)\}$$

对价格系统 p 有两种理解。第一种也是最直接的一种: 以货币表示价格。每个人可以选择出售其最初拥有的商品组合中的一些商品, 然后用所得的货币收入购买其他商品。比如, 如果他卖掉 y_1 单位的商品 1, 那么可以获得的收入为 $p_1 y_1$, 他可以用这些钱购买 z_2 单位的商品 2, 其中, $p_1 y_1 = p_2 z_2$ 。对价格系统的第二种解释是: 价格表示商品之间的交换比例。具体来说, 价格系统 (p_1, p_2) 的意思是, 可以用 1 单位商品 1 交换 p_1/p_2 单位商品 2。

请注意, 因为对所有 p 和 $e(i)$ 都有 $B(\lambda p, e(i)) = B(p, e(i))$, 所以不管用

以上两种方式中的哪一种来理解价格系统, 价格系统 p 都等同于任意一个形式为 $\lambda p = (\lambda p_1, \lambda p_2)$ 的价格系统 (即所有商品的价格都乘以一个正数的价格系统), 其中 $\lambda > 0$ 。

10.1.2 配置

市场中可获得的商品 k 的总量为 $\sum_{i \in N} e_k(i)$ 。配置就是将所有商品在个人之间分配。

定义 10.3: 分配和配置

在一个交换经济 $\langle N, (\succsim^i)_{i \in N}, e \rangle$ 中, 分配 (assignment) 是从个人的集合 N 到个人可能得到的商品组合的集合 $\mathbb{R}_+^2$ 的函数。配置 (allocation) 是使分配出去的商品组合的总量等于初始商品组合的总量的一种分配方案 a :

$$\sum_{i \in N} a(i) = \sum_{i \in N} e(i)$$

10.2 竞争性均衡

本章的核心概念是竞争性均衡。竞争性均衡包括一个价格系统和一个分配方案, 给定价格系统和个人最初拥有的商品组合, 分配给每个人的商品组合对他而言都是最优的, 且这个分配是一个配置。如果这个条件不满足, 要么是至少有一个人没有得到对他来说最优的商品组合, 要么是至少有一种商品的供给和需求不相等, 即人们想要购买的商品总量不等于市场中出售的商品总量。

定义 10.4: 交换经济的竞争性均衡

一个交换经济 $\langle N, (\succsim^i)_{i \in N}, e \rangle$ 的竞争性均衡是一对 (p, a) , 其中:

- $p = (p_1, p_2)$ 是一个价格系统。
- a 是一个分配方案。

它们满足:

最优性

对每个人 $i \in N$, 商品组合 $a(i)$ 都是在预算集 $B(p, e(i))$ 中依据 $\succsim^i$ 判断的最优组合 (也就是说, 预算集 $B(p, e(i))$ 中不存在商品组合 b 使得 $b \succ^i a(i)$)。

可行性

a 是一个配置。

如果存在某一个价格系统 p , 使得 (p, a) 是 $\langle N, (\succsim^i)_{i \in N}, e \rangle$ 的竞争性均衡, 则配置 a 是交换经济 $\langle N, (\succsim^i)_{i \in N}, e \rangle$ 中的一个竞争性均衡配置。

请注意, 由于对所有 $i \in N$ 都有 $B(\lambda p, e(i)) = B(p, e(i))$, 所以如果 (p, a) 是交换经济 $\langle N, (\succsim^i)_{i \in N}, e \rangle$ 的竞争性均衡, 那么 $(\lambda p, a)$ 也是交换经济 $\langle N, (\succsim^i)_{i \in N}, e \rangle$ 的竞争性均衡, 其中 $\lambda > 0$ 。

在竞争性均衡中,所有人所面临的价格系统都相同,且每个人都从该价格系统决定的预算集中选择一个最优的商品组合。我们假设价格系统不受个人选择的影响。如果市场中人数很多,且没有人最初拥有的商品在市场中占比很大,那么这个假设就是合理的。如果市场中人数较少,这个假设就不太合理,因为市场中人数较少时个人的行为对价格的影响可能会很大。然而,请注意,竞争性均衡的概念是界定完好的,与人数及商品组合的初始配置无关。即使市场中只有一个人,竞争性均衡的概念也是界定完好的;但是,当市场中只有一个人时,市场均衡性概念的合理性就有待商榷了。

图 10.1 说明了只有两个人的交换经济中的竞争性均衡。图中两个灰色向量的长度相等,方向相反,也就是说,这两个人选择的最优商品组合之和等于其最初拥有的商品组合之和。

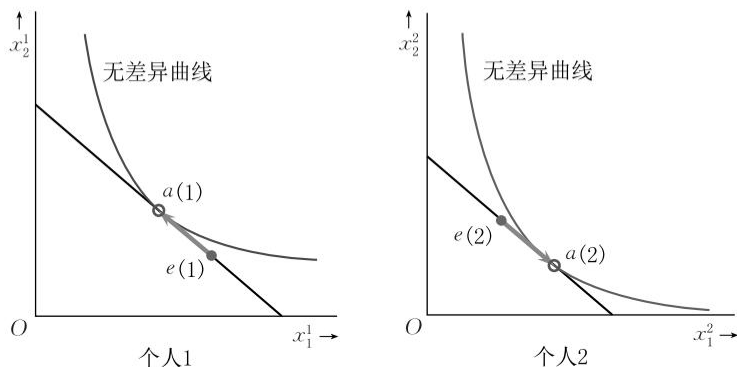


图 10.1 有两个人的交换经济中的竞争性均衡

注:价格的比率 p_1/p_2 是(直的)预算约束线的(共同)斜率, $a(1)$ 和 $a(2)$ 是个人选择的最优商品组合。这组价格满足竞争性均衡所要求的条件,因为左右两图中的灰色向量是大小相等且方向相反的:由于 $e(1)-a(1)=-(e(2)-a(2))$,因此 $a(1)+a(2)=e(1)+e(2)$ 。

例 10.1: 替代品的竞争性均衡

在一个交换经济 $\langle N, (\geq^i)_{i \in N}, e \rangle$ 中, $N=\{1, 2\}$, $e(1)=(\alpha, 0)$, $e(2)=(0, \beta)$, 其中 $\alpha>0$, $\beta>0$, 即最初两种商品分别由两人独占, 且每个人的偏好关系 $\geq^i$ 都可以用效用函数 (x_1+x_2) 表示(即当 $v_1/v_2=1$ 时, 例 4.1 中的效用函数)。

在这个交换经济中, (p, a) 是一个竞争性均衡, 其中 $p=(1, 1)$, $a=e$ 。在这个均衡中, 个人 1 和个人 2 的预算约束线分别为 $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}_+^2 : x_1+x_2=\alpha\}$ 和 $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}_+^2 : x_1+x_2=\beta\}$, 个人 i 认为预算约束线上的商品组合是无差异的, 而 $e(i)$ 对个人 i 来说就是最优的商品组合(参考例 5.6)。请注意, 竞争性均衡的概念仅要求分配给个人的商品组合对他来说是最优的商品组合, 不要求这个商品组合对他来说是唯一的最优商品组合。

更一般来看, 每一对 (p, a) 都是一个竞争性均衡, 其中, $p=(1, 1)$, $a(1)=(\alpha-\epsilon, \epsilon)$, $a(2)=(\epsilon, \beta-\epsilon)$, $0 \leq \epsilon \leq \min\{\alpha, \beta\}$ 。在这个均衡中, 个人用 ϵ 单位最初拥有的某种商品来交换 ϵ 单位的另一种商品。这两个人并不会因交换而得到更

好的商品组合,因为在给定的价格系统下,个人交换所得的每一个商品组合中两种商品数量的总和都相等。

如果两种商品的价格不相等,这个交换经济中不存在竞争性均衡。如果两种商品的价格不相等,对每个人来说最优的商品组合只有一个,且该商品组合中不包含价格更高的那种商品,而这不符合竞争性均衡的定义。

例 10.2: 互补品的竞争性均衡

与例 10.1 一样,在一个交换经济 $\langle N, (\geq^i)_{i \in N}, e \rangle$ 中, $N = \{1, 2\}$, $e(1) = (\alpha, 0)$, $e(2) = (0, \beta)$ 。每个人的偏好关系由效用函数 $\min\{x_1, x_2\}$ 表示(如例 4.4 所示)。

对于任意一个价格系统 p (其中 $p_1 > 0$, $p_2 > 0$), 两个人最优的商品组合为(如例 5.5 所示):

$$x^1(p) = \left(\frac{\alpha p_1}{p_1 + p_2}, \frac{\alpha p_1}{p_1 + p_2} \right) \text{ 以及 } x^2(p) = \left(\frac{\beta p_2}{p_1 + p_2}, \frac{\beta p_2}{p_1 + p_2} \right)$$

要使这些商品组合是一个配置,需满足:

$$\frac{\alpha p_1}{p_1 + p_2} + \frac{\beta p_2}{p_1 + p_2} = \alpha \text{ 以及 } \frac{\alpha p_1}{p_1 + p_2} + \frac{\beta p_2}{p_1 + p_2} = \beta$$

两个等式左边是相等的,因此,如果 $\alpha = \beta$ 则在任意价格系统 p ($p_1 > 0$, $p_2 > 0$) 下,这个交换经济都有竞争性均衡 (p, a) , 其中, $a(1) = x^1(p)$, $a(2) = x^2(p)$ 。

如果 $\alpha \neq \beta$ 且两种商品的价格都大于 0, 则不存在竞争性均衡。但是,如果市场中有一种商品的价格等于 0, 则存在竞争性均衡。不妨假设 $\alpha > \beta$ 。如果价格系统为 $(0, 1)$, 则该交换经济中存在均衡(商品 1 有剩余, 多余的商品 1 没有任何价值)。给定商品 1 的价格是 0, 个人 2 可以消费任意数量的商品 1, 所以对他来说任意一个商品组合 (x_1^2, β) 都是最优的, 其中 $x_1^2 \geq \beta$ 。个人 1 只拥有商品 1, 在其预算约束线上的所有商品组合 $(x_1^1, 0)$ 对他来说都是无差异的。竞争性均衡要求 $x_1^1 + x_1^2 = \alpha$, 故当且仅当 $a(1) = (x_1^1, 0)$, $a(2) = (\alpha - x_1^1, \beta)$ 且 $x_1^1 \leq \alpha - \beta$ 时, $((0, 1), a)$ 才是一个竞争性均衡。比如, 当 $a(1) = (\alpha - \beta, 0)$, $a(2) = (\beta, \beta)$ 时, $((0, 1), a)$ 是一个竞争性均衡。

例 10.2 表明,在某些情况下,如果某个人把最初拥有的商品毁掉一些,可能会使其在竞争性均衡中得到的商品组合变得更好。如果 $\alpha > \beta$, 那么个人 1 在竞争性均衡中消费的商品组合为 $(x_1^1, 0)$, 其中, $x_1^1 \leq \alpha - \beta$ 。如果他毁掉一些最初拥有的商品 1, 减少至 γ 单位 ($0 < \gamma < \beta$), 则竞争性均衡的价格系统从 $(0, 1)$ 变为 $(1, 0)$, 那么均衡配置为 a , 其中, $a(1) = (\gamma, \beta - x_2^2)$, $a(2) = (0, x_2^2)$, $0 \leq x_2^2 \leq \beta - \gamma$ 。相对于之前的均衡配置,个人 1 更偏好减少商品 1 持有量后的配置。某个人可能因减少其最初拥有的商品而得益,这个结论的成立并不需要均衡价格一定等于 0, 一些例子可以证明就算两种商品的均衡价格都大于 0, 这个结论也可能成立。

竞争性均衡的定义要求在给定的价格系统下,每个人的最优商品组合的和等于

所有人最初拥有的商品组合的和(即所有商品的供需相等)。下面的命题 10.1 讲的是,给定价格系统和在这个价格系统下所有最优商品组合的任意一个分配方案,如果一种商品的分配总量等于所有个人最初拥有的这种商品的总量,那么另一种商品的分配的总量也等于所有个人最初拥有的这种商品的总量。这个结论在计算竞争性均衡时非常有用,因为这个结论意味着:如果我们找到一个价格系统,使得某种商品的供需相等,另一商品的供需自然也相等,这个价格系统就满足了竞争性均衡的要求。

命题 10.1: 预算约束线上的商品组合的分配

一个交换经济为 $\langle N, (\geq^i)_{i \in N}, e \rangle$, p 为价格体系, 且 $p_1 > 0, p_2 > 0$ 。现有一个分配方案 a , 对所有个人 $i \in N$ 都有 $pa(i) = pe(i)$ (即 $a(i)$ 位于个人 i 的预算约束线上)。在这个分配方案 a 中, 如果商品组合中一种商品的分配总量等于所有人最初拥有的商品组合中该商品的总量, 那么另一商品的分配总量也等于所有人最初拥有的商品组合中该商品的总量, 即:

$$\sum_{i \in N} a_1(i) = \sum_{i \in N} e_1(i) \Leftrightarrow \sum_{i \in N} a_2(i) = \sum_{i \in N} e_2(i)$$

证明: 对所有个人 $i \in N$, 都有 $pa(i) = pe(i)$, 意味着对所有个人 $i \in N$, 都有 $p_1 a_1(i) + p_2 a_2(i) = p_1 e_1(i) + p_2 e_2(i)$ 。于是有:

$$\sum_{i \in N} [p_1 a_1(i) + p_2 a_2(i)] = \sum_{i \in N} [p_1 e_1(i) + p_2 e_2(i)]$$

因此有:

$$p_1 \left(\sum_{i \in N} a_1(i) - \sum_{i \in N} e_1(i) \right) = p_2 \left(\sum_{i \in N} e_2(i) - \sum_{i \in N} a_2(i) \right)$$

由于 $p_1 > 0, p_2 > 0$, 显然有:

$$\sum_{i \in N} a_2(i) - \sum_{i \in N} e_2(i) = 0 \Leftrightarrow \sum_{i \in N} e_1(i) - \sum_{i \in N} a_1(i) = 0$$

例 10.3 与前两个例子一样, 假设在一个交换经济 $\langle N, (\geq^i)_{i \in N}, e \rangle$ 中, $N = \{1, 2\}$, $e(1) = (\alpha, 0)$, $e(2) = (0, \beta)$ 。假设每个人的偏好关系可以用效用函数 $x_1 x_2$ 表示。根据之前的讨论, 对这样的个人来说, 最优的商品组合应满足以下性质: 个人等分其财富, 分别购买每种商品 (详见例 5.7)。如果 $((p_1, 1), a)$ 是一个竞争性均衡, 且 $p_1 > 0$, 那么个人 1 在每种商品上都花费 $p_1 \alpha / 2$, 因此 $a(1) = (\alpha / 2, p_1 \alpha / 2)$ 。同理可得 $a(2) = (\beta / (2p_1), \beta / 2)$ 。根据命题 10.1, 当且仅当 $\alpha / 2 + \beta / (2p_1) = \alpha$ 时, $((p_1, 1), a)$ 才是一个竞争性均衡。如果某一商品的价格为 0, 这个交换经济中就不存在竞争性均衡, 因此 (p, a) 是唯一的竞争性均衡, 其中 $p = (\beta / \alpha, 1)$, $a(1) = a(2) = (\alpha / 2, \beta / 2)$ 。

10.3 竞争性均衡的存在性

我们打算给出交换经济中存在竞争性均衡的精确条件, 因为那需要用到超出本书知识范围的数学工具。但是, 如果每个人的需求函数都是连续的, 我们可以

得到以下命题 10.2。如果每个人都是理性的,并且具有严格凸且连续的偏好,由作为价格系统函数的个人最优选择可以得到这样的个人需求函数。以下这个命题讲的是,如果在某种商品的价格足够低时每个人都想获得比其最初拥有的数量更多的这种商品,而在某种商品价格足够高时都想出售一些其最初拥有的这种商品,则竞争性均衡是存在的。

命题 10.2:竞争性均衡的存在性

设一个交换经济为 $\langle N, (\succsim^i)_{i \in N}, e \rangle$ 。对任意一个人 $i \in N$ 和价格系统 $p(p_1 > 0, p_2 > 0)$, 设 $x^i(p)$ 是预算集 $B(p, e(i))$ 中根据 $\succsim^i$ 找到的偏好程度最高的商品组合。给定价格系统为 $(p_1, 1)$, 个人 i 对商品 1 的需求为 $d^i(p_1) = x_1^i(B((p_1, 1), e(i)))$ 。假设:

- 需求函数 d^i 都是连续的。
- 如果价格 p_1 足够低, 对所有个人 $i \in N$, 都有 $d^i(p_1) > e_1(i)$ (即每个人都想消费比其最初拥有的数量更多的商品 1)。
- 如果价格 p_1 足够高, 对所有个人 $i \in N$, 都有 $d^i(p_1) < e_1(i)$ (即每个人都想出售一些其最初拥有的商品 1)。

那么, 这个交换经济中存在竞争性均衡。

证明: 对任意一个价格 p_1 , 令 $z(p_1) = \sum_{i \in N} [d^i(p_1) - e_1(i)]$, 即价格系统为 $(p_1, 1)$ 时对商品 1 的总需求和可供应的商品 1 总量之间的差值。假设 d^i 是连续的, 于是函数 z 也是连续的。由 p_1 的取值很小和很大时对需求函数的假设可得, p_1 足够小时 $z(p_1)$ 大于 0, p_1 足够大时 $z(p_1)$ 小于 0。(满足这个条件的函数 z 如图 10.2 所示。)由中值定理可知, 至少存在一个价格 p_1^* 使得函数 z 的值为 0。(可能存在超过一个价格使得函数 z 的值为 0。)

我们称 $((p_1^*, 1), (x^i(p_1^*, 1))_{i \in N})$ 是一个竞争性均衡。根据需求函数的定义, 它满足最优性条件。由命题 10.1 可知, 可行性条件也得到了满足, 即如果第一种商品的超额需求等于 0, 那么第二种商品的超额需求也等于 0。

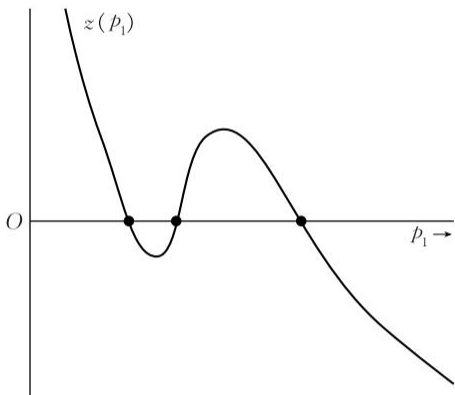


图 10.2 命题 10.2 所需条件满足时对商品 1 的超额需求函数 z 的一个示例

注: 图中三个实心圆点表示商品 1 的竞争性均衡价格。

如果交换经济中某些个人的偏好不是凸的,那么该交换经济中可能不存在竞争性均衡;课后习题第5题要求你分析这样的例子。例10.2表明,交换经济中可能存在多个均衡,且各竞争性均衡的价格系统和均衡配置都不同。

10.4 重启交易

在交换经济 $\langle N, (\succsim^i)_{i \in N}, e \rangle$ 中,个人 i 最初拥有商品组合 $e(i)$ 。假设每个人按照竞争性均衡 (p, a) 进行交易。交易后,每个个人 i 拥有商品组合 $a(i)$ 。现在,假设重新开始交易,此时,交换经济 $\langle N, (\succsim^i)_{i \in N}, a \rangle$ 中的个人 i 最初拥有的商品组合是 $a(i)$ 。 (p, a) 仍然是这个交换经济中的竞争性均衡吗?命题10.3表明,答案是肯定的。

命题 10.3:达到竞争性均衡后不会再有交易

交换经济 $\langle N, (\succsim^i)_{i \in N}, e \rangle$ 的竞争性均衡 (p, a) 也是交换经济 $\langle N, (\succsim^i)_{i \in N}, a \rangle$ 的竞争性均衡。

证明:根据竞争性均衡的定义可得, a 为一个配置,所以它满足竞争性均衡的可行性条件。最优性条件也满足:由于 $pa(i) = pe(i)$,预算集 $B(p, e(i))$ 和 $B(p, a(i))$ 是一样的,所以如果 $a(i)$ 在预算集 $B(p, e(i))$ 中对个人 i 来说是最优选择,那么在预算集 $B(p, a(i))$ 中对个人 i 来说也是最优选择。

10.5 均衡和帕累托稳定性

下面我们证明竞争性均衡配置是帕累托稳定的。

命题 10.4:竞争性均衡配置是帕累托稳定的

交换经济中每个竞争性均衡配置都是帕累托稳定的。

证明:设 (p, a) 是交换经济 $\langle N, (\succsim^i)_{i \in N}, e \rangle$ 的竞争性均衡。假设 a 不是帕累托稳定的,也就是说,假设存在另外一个配置 y 使得对所有个人 i 来说都有 $y(i) \succsim^i a(i)$,且对某个个人 j 来说有 $y(j) \succ^j a(j)$ 。

由于 $a(i)$ 是在个人 i 的预算集中根据 $\succsim^i$ 得到的最优商品组合,可知 $py(i) \geq pe(i)$;因为如果 $py(i) < pe(i)$,那么预算集中存在另外一个商品组合,对这个商品组合的偏好程度高于 $y(i)$,于是也高于 $a(i)$,这与 $a(i)$ 是最优商品组合矛盾。 $a(j)$ 是在个人 j 的预算集中的最优商品组合,可知 $py(j) > pe(j)$ 。因此有 $p \sum_{i \in N} y(i) > p \sum_{i \in N} e(i)$,而这与 y 的可行性相矛盾, y 的可行性要求 $\sum_{i \in N} y(i) = \sum_{i \in N} e(i)$ 。所以, a 是帕累托稳定的。

评注

1. 这个结论依赖于一个假设:每个人都只在意自己所消费的商品组合。现在来看另一种交换经济:个人不仅在意自己所消费的商品组合,也在意别人所消费的商品组合。具体地,假设该经济中包括两个人,其最初拥有的商品组

合为 $(1, 0)$ 和 $(0, 1)$ 。个人 2 对商品 2 的消费会对个人 1 造成负面影响;配置为 a 时,个人 1 的效用函数为 $[a_1(1)+a_2(1)-2a_2(2)]$ 。个人 2 只在意他自己的消费,配置为 a 时,个人 2 的效用为 $[2a_1(2)+3a_2(2)]$ 。假设每个人认为另一人的消费是给定的,价格体系 $(p_1, 1)$ 满足 $\frac{2}{3} \leq p_1 \leq 1$,在这个价格体系下,每种商品的需求量都等于 1,二人之间没有交易发生(此时的配置就是其最初拥有的配置)。配置 a 不是帕累托稳定的:比如,在 $b(1)=(0, 0.5)$, $b(2)=(1, 0.5)$ 时,两个人相对于 a 更偏好 b 。

2. 如果不存在其他配置使得与某个配置相比,对所有人来说都至少一样好,并且至少对一个人来说更好,那么这个配置是帕累托稳定的。我们建议读者自己证明一下:在以下情况下,当且仅当不存在其他配置对每个人来说都更好时,这个配置才是帕累托稳定的。

(1) 个人的偏好关系是凸的,并且配置中每个商品组合所含的两种商品的数量都大于 0。

(2) 个人的偏好是严格单调的。

3. 命题 10.4 的含义与命题 9.4 类似。如果交换经济 $\langle N, (\geq^i)_{i \in N}, e \rangle$ 中存在竞争性均衡 (p, a) ,那么对任意个人 $i \in N$ 都有 $a(i) \geq^i e(i)$ 。因此,如果初始配置 e 是帕累托稳定的,那么每个人 i 都认为 $a(i)$ 和 $e(i)$ 是无差异的, (p, e) 也是该交换经济的竞争性均衡。假设社会规划者或者管理者可以在个人之间重新分配商品,且他希望交换经济中的配置是帕累托稳定配置 a 。由命题 10.4 可得,如果他重新分配商品,产生配置 a ,随后重新开放交易,那么重新分配的效果不会受到影响,也就是说,当分配结果是新的配置 b 时,对每个人 i 来说都有 $b(i) \sim^i a(i)$ 。
4. 命题 10.4 类似于命题 9.3,通常被称为“福利经济学第一定理”。在前面评注 3 中提到,命题 10.4 类似于命题 9.4,通常被称为“福利经济学第二定理”。基于我们在对命题 9.3 的讨论中给出的理由,我们认为这两个称呼都是不合适的。

10.6 核心

命题 10.4 讲的是,不存在这样一个配置:对所有人来说都比竞争性均衡配置更好。事实上,有一个更强的结论:对任意一个竞争性均衡配置 a 而言,没有任意一群人能因退出该交换经济然后在群内重新分配商品(不与群外的人交换商品)而得益,也就是说,这群人的状况不可能比在配置 a 中更好。为详细讨论这个结论,我们引入另外一个表示稳定性的概念——核心。

定义 10.5:核心

考虑有一个交换经济为 $\langle N, (\geq^i)_{i \in N}, e \rangle$ 。如果一个非空的个人集合 $S \subseteq N$

中的个人相对于在 a 中所得的商品组合,更偏好在 b 中所得的商品组合,即当 $\sum_{i \in S} b(i) = \sum_{i \in S} e(i)$ (其中, $S \subseteq N$) 时,如果对所有个人 $i \in S$ 都有 $b(i) \succ^i a(i)$, 我们称这些人在配置 a 中的情况是可以改善的。如果没有一群人在配置 a 中的情况是可以改善的,我们称最终配置 a 处于这个交换经济的核心(core)。

请注意,与帕累托稳定不同,一个配置是否处于核心,与人们最初拥有的商品组合的配置有关。

下面这个例子表明:一个配置可以是帕累托稳定的,并且对所有人来说,与初始配置相比都更好,但这个配置并不处于核心。

例 10.4:不处于核心的帕累托稳定配置

假设一个交换经济中有两种人——类型 1 有 2 人,类型 2 也有 2 人。类型 1 的这两个人最初拥有的商品组合为 $(1, 0)$, 且其偏好关系可以由效用函数 $\min\{x_1, x_2\}$ 表示。类型 2 的这 2 人最初拥有的商品组合都为 $(0, 1)$, 且其偏好关系可以由效用函数 $(x_1 + x_2)$ 表示。

在配置 a 中,类型 1 的个人得到的商品组合为 $(0.1, 0.1)$, 类型 2 的个人得到的商品组合为 $(0.9, 0.9)$ 。相对于其最初拥有的商品组合,这两种人都更偏好在配置 a 中分得的商品组合。这个配置是帕累托稳定的(对于任何个人所偏好的每一种商品组合,其中商品的数量总和都超过了最初分配给他的数量总和)。然而,集合 S (包括类型 1 的 2 人和类型 2 的 1 人)中的个人相对于在配置 a 中所得的商品组合,更偏好在集合 S 中三人相互交易所得的商品组合:如果类型 1 的 2 人分得商品组合 $(0.2, 0.2)$, 类型 2 的 1 人分得商品组合 $(1.6, 0.6)$, 比这三个人在配置 a 中所得的商品组合更好。

命题 10.5:竞争性均衡处于核心

交换经济中,每个竞争性均衡配置都处于核心。

证明: 设 (p, a) 是交换经济 $(N, (\succsim^i)_{i \in N}, e)$ 的竞争性均衡。假设 a 不处于该交换经济的核心,那么存在非空集合 $S \subseteq N$ 和一组商品组合 $(b(i))_{i \in S}$ ($\sum_{i \in S} b(i) = \sum_{i \in S} e(i)$), 使得对所有个人 $i \in S$ 都有 $b(i) \succ^i a(i)$ 。因为 (p, a) 是一个竞争性均衡,所以对每个人 i 来说,商品组合 $a(i)$ 都是在个人 i 的预算集中根据 $\succsim^i$ 做出的最优选择。因此,如果 $b(i) \succ^i a(i)$, 则需 $pb(i) > pe(i)$, 加总后得到 $p \sum_{i \in S} b(i) > p \sum_{i \in S} e(i)$ 。这个不等式与可行性条件 $\sum_{i \in S} b(i) = \sum_{i \in S} e(i)$ 相矛盾。因此, a 处于核心。

10.7 基于需求函数的竞争性均衡

我们用个人的偏好关系和其最初拥有的商品组合来刻画交换经济中的个人。在竞争性均衡中,每个人都根据其偏好关系从预算集中选出其最喜欢的商品组合。在这个模型的变体中,我们用个人的需求函数和其最初拥有的商品组合来刻画个

人。给定个人最初拥有的商品组合,个人的需求函数给出了在不同价格系统下个人所消费的商品组合。这些需求函数可能不能被偏好关系理性化(这类需求函数的示例详见 5.5 节)。

在交换经济的这个变体中,竞争性均衡为 (p, a) ,它包括价格系统 p 和分配 a ,并且满足:(1)对任意个人 i , $a(i)$ 都是在给定价格系统 p 和最初拥有的商品组合 $e(i)$ 时,需求函数给出的商品组合;(2) a 是一个配置。

例 10.5:基于需求函数的竞争性均衡

考虑一个有两个人交换经济,其中个人 1 只消费价格更高的商品,如果两种商品的价格相同,他只消费商品 1。不存在一个单调的偏好关系可以合理解释这个需求函数(详见例 5.11)。假设个人 2 更偏好预算集内使函数 (x_1+x_2) 的值最大的商品组合,如果两种商品的价格不同,他只消费价格更低的商品。

假设 $e(1)=(\alpha, 0)$, $e(2)=(0, \beta)$ 。个人 1 只消费第一种(价格更高的)商品,个人 2 只消费第二种(价格更低的)商品,所以 (p, a) 是一个竞争性均衡,其中, p 为价格系统, $p_1 \geq p_2 = 1$; a 为配置, $a(1)=(\alpha, 0)$, $a(2)=(0, \beta)$ 。

如果 $p_1 < p_2 = 1$,只有当 $a(1)=(0, \alpha p_1)$ 且 $a(2)=(\beta/p_1, 0)$ 时, (p, a) 才是一个竞争性均衡。当且仅当 $p_1 = \beta/\alpha$ 时,这两个商品组合的总和为 (α, β) 。因此,如果存在这个竞争性均衡,需要 $\beta < \alpha$ 成立。实际上,如果 $\beta < \alpha$,除了上一段提到的均衡外,当 $p=(\beta/\alpha, 1)$, $a(1)=(0, \beta)$, $a(2)=(\alpha, 0)$ 时的 (p, a) 也是一个竞争性均衡。

10.8 可操纵性

如果某个人为了得到对自己有利的结果故意展示出不同于其真实偏好的偏好,是否可以对竞争性均衡产生影响? 例 10.6 表明,这是可能发生的。(相反,第 9 章的课后习题第 5 题表明,在第 9 章研究的模型中,这种操纵是不可能的。)

例 10.6:竞争性均衡的可操纵性

考虑一个有两个人交换经济。个人 1 的偏好关系可以用效用函数 (x_1+x_2) 表示,个人 2 的偏好关系可用效用函数 $\min\{x_1, x_2\}$ 表示,这两个人最初拥有的商品组合为 $e(1)=(1, 0)$, $e(2)=(0, 1)$ 。这个交换经济中存在唯一的竞争性均衡 (p, a) ,其中 $p=(1, 1)$, $a(1)=a(2)=(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ 。

如果个人 1 展示出的偏好关系用效用函数 $(3x_1+x_2)$ 表示(即他假装对商品 1 的偏好程度比他实际对商品 1 的偏好程度更高),那么竞争性均衡价格为 $(3, 1)$,个人 1 在竞争性均衡配置中得到的商品组合为 $(\frac{3}{4}, \frac{3}{4})$,比他展示真实偏好情况下所得的商品组合 $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ 更好。

10.9 埃奇沃思盒状图

埃奇沃思盒状图是用于分析包含两个人和两种商品的交换经济的图形工具。我们以图 10.1 为例。将图 10.1 的右图(表示个人 2 的最优化问题)旋转 180 度,可得图 10.3。然后将图 10.3 左右两图拼到一起,使得(用黑色圆点表示的)两人最初拥有的商品组合重合,得到图 10.4(a)。在图 10.4(a)中,由两对坐标轴围成的矩形中的每一个点表示一个配置,分配给个人 1 的商品组合根据原点在左下方的坐标轴画出来,分配给个人 2 的商品组合根据原点在右上方的那对坐标轴画出来。

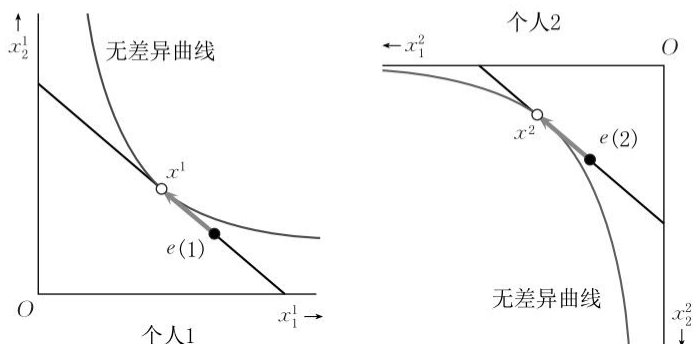
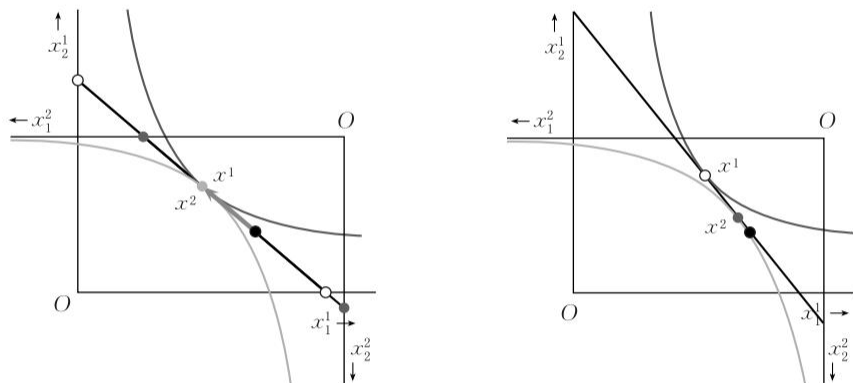


图 10.3 图 10.1 中的竞争性均衡,其中个人 2 的图被旋转了 180 度

在图 10.4(a)中,黑色圆点代表两个人最初拥有的商品组合,空心圆点之间的黑色线段(从个人 1 的坐标轴看)表示个人 1 的预算集,深灰色圆点之间的线段(从个人 2 的坐标轴看)表示个人 2 的预算集。如图 10.4(a)所示,如果表示个人 1 的最优的商品组合 x^1 的圆点与表示个人 2 的最优的商品组合 x^2 的圆点重合,则这条预算线与竞争性均衡一致,因为给当前的价格系统时这两人都得到各自的最



(a) 图 10.1 中的竞争性均衡,其中个人 2 的图被旋转 180 度,再左右两图拼到一起使两人初始商品组合重合
(b) 价格系统不与竞争性均衡一致

图 10.4 埃奇沃思盒状图

优商品组合,而且这个分配是一个配置。图 10.4(b)表示一个与竞争性均衡不一致的价格系统,此时,商品 1 的需求量小于供给量,商品 2 的需求量超过供给量。

帕累托稳定配置所组成的集合和核心如图 10.5 所示。连接个人 1 的原点和个人 2 的原点的黑色和深灰色拼接线上的每个配置都是帕累托稳定的。对于深灰色和黑色拼接线上的每一点(配置),都有两条无差异曲线穿过它,分别是个人 1 和个人 2 的无差异曲线。在其中一个人(比如个人 1)的当前的无差异曲线上或上方的配置(点),可以使个人 1 过得更好,但因为这个配置位于另一人(个人 2)的当前无差异曲线的下方(相对于个人 2 的原点),会使个人 2 过得更差。此外,不在黑线和深灰线上的所有配置都不是帕累托稳定的,因为总存在另一个配置使得两个人过得更好。

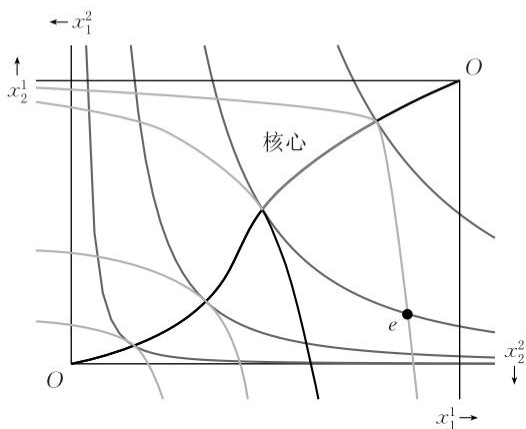


图 10.5 核心(深灰色线)和帕累托稳定的配置的集合(深灰色线加黑色线)

当且仅当配置是帕累托稳定的,且个人相对于其最初拥有的商品组合同样偏好或更偏好这个配置时,这个配置才处于这个两人经济的核心。因此核心是图 10.5 中位于深灰色线上的配置所组成的集合。

课后习题

1. 示例。在某个交换经济中, n^A 个人的偏好可用效用函数 u^A 表示,且最初拥有的商品组合为 e^A ; n^B 个人的偏好可用效用函数 u^B 表示,且最初拥有的商品组合为 e^B 。

经济	n^A	n^B	u^A	u^B	e^A	e^B
E_1	1	1	$x_1 + x_2$	$\min\{x_1, x_2\}$	$(\alpha, 0)$	$(0, \beta)$
E_2	1	2	$x_1 + x_2$	$\min\{x_1, x_2\}$	$(1, 0)$	$(0, 1)$
E_3	n^A	n^B	x_2	x_1	$(\alpha, 0)$	$(0, \beta)$
E_4	1	1	$x_1 x_2$	$x_1^2 x_2$	$(2, 3)$	$(5, 4)$

- (1) 请找出 $\alpha \leq \beta \leq 2\alpha$ 时, E_1 的竞争性均衡。并画出 E_1 的埃奇沃思盒状图, 标示出帕累托稳定的配置的集合以及核心。
 - (2) 请找出 E_2 的竞争性均衡。
 - (3) 请找出 E_3 的竞争性均衡。
 - (4) 请找出 E_4 的竞争性均衡(有些人可能不喜欢这种有些重复性质的问题, 但强烈建议你认真做完它)。你找出竞争性均衡的价格系统应该是 $(\frac{25}{16}, 1)$ 。
2. 拥有完美互补品的市场。在一个交换经济中, 所有人的偏好都可用效用函数 $\min\{x_1, x_2\}$ 表示; n_1 个人最初拥有的商品组合为 $(1, 0)$, n_2 个人最初拥有的商品组合为 $(0, 1)$, 且 $n_1 \geq n_2$ 。
- (1) 请证明: 如果配置中每个人分得的商品组合为 $(n_1/(n_1 + n_2), n_2/(n_1 + n_2))$, 则这个配置是帕累托稳定的。
 - (2) 请证明: 当且仅当 $n_1 = n_2$ 时, 配置处于核心。
 - (3) 如果 $n_1 > n_2$, 该交换经济的竞争性均衡是什么?
3. 复制一个市场。设一个交换经济为 $M_1 = \langle N, (\geq^i)_{i \in N}, e \rangle$, 且 $N = \{A, B\}$ 。有另外一个交换经济 M_n , 它包括 n 个与 A 相同的人(类型 A), n 个与 B 相同的人(类型 B)。
- (1) 设 (p, a) 是 M_1 的竞争性均衡, 在 M_n 中的分配规则 b 把商品组合 $a(A)$ 分给 n 个类型为 A 的人, 把商品组合 $a(B)$ 分给 n 个类型为 B 的人。请证明 (p, b) 是 M_n 的竞争性均衡。
 - (2) 请证明: 如果所有人都有严格凸偏好, 且 (p, b) 是 M_n 的竞争性均衡, 那么, 类型为 A 的所有人消费的商品组合相同, 表示为 x_A , 类型为 B 的所有人消费的商品组合相同, 表示为 x_B , 而且, (p, a) 是 M_1 的竞争性均衡, 其中, $a(A) = x_A$, $a(B) = x_B$ 。
4. 鲁滨逊·克鲁索经济。假设一个交换经济中只有一个人 R , 其最初拥有的商品组合为 e , 这个交换经济的竞争性均衡为 (p, x^*) , 其中 p 是价格系统, x^* 是一个商品组合。对这个人 R 来说, x^* 是在 $\{x \in \mathbb{R}_+^2 : px = pe\}$ 中的最优选择, 且 $x^* = e$ 。假设 R 的偏好是单调、连续、凸的。请画图解释为什么这个交换经济存在竞争性均衡?
5. 偏好非凸的经济。在命题 10.2 之前, 我们曾讲过, 交换经济中竞争性均衡存在的充分条件之一是个人的偏好是凸的。通过这道题中, 你会知道, 如果个人的偏好不是凸的, 竞争性均衡也可能存在。假设一个交换经济中有两个人, 他们的偏好关系可以用效用函数 $[(x_1)^2 + (x_2)^2]$ 表示, 这个效用函数不是凸的[见第 4 章课后习题第 1 题(1)]。假设 $e_k(1) + e_k(2) > 0$, 其中 $k = 1, 2$ 。
- (1) 请证明: 如果 $e(1) = (\alpha, 0)$, $e(2) = (0, \beta)$, 则该交换经济中存在一个竞争性均衡。

- (2) 请证明:如果该交换经济存在一个竞争性均衡,则两种商品的均衡价格相等。
- (3) 请证明:如果 $e(1)=e(2)=(2, 1)$,则该交换经济中不存在竞争性均衡。
- (4) 如果交换经济中存在竞争性均衡,请说明其初始配置有什么特征。
6. 交换经济与住房经济的结合。在一个交换经济 $\langle N, (\geq^i)_{i \in N}, e \rangle$ 中,每个人最初拥有的商品组合都互不相同[即对 N 中所有 $i \neq j$ 都有 $e(i) \neq e(j)$]。每个人的偏好关系都是单调、连续、凸的。假设每个人都只能从所有人最初拥有的商品组合中选择,而不可以选择 $\mathbb{R}_+^2$ 中的任意一个商品组合。
 - (1) 假设在均衡中的价格是赋给每个商品组合的而不是赋给每个商品的。请解释如何用第 9 章的住房模型来确定该市场的均衡?
 - (2) 请构建这样的市场:该市场中有 4 个人,其中 $e(1)=(2, 0)$, $e(2)=(0, 2)$, $e(3)=(1, 0)$, $e(4)=(0, 1)$,而竞争性均衡的价格函数 p 不是线性的,也就是说,不存在 (p_1, p_2) 使得对所有个人 i 都有 $p(e(i))=p_1 e_1(i) + p_2 e_2(i)$ 。
7. 偏好可微的经济。假设一个交换经济中有两个人,这两个人最初拥有的商品组合的总和为 $(1, 1)$,他们的偏好关系是严格单调、凸且可微的。而且,如果 $x_1 + x_2 > 1$,商品组合 (x_1, x_2) 这个点的边际替代率小于 1;如果 $x_1 + x_2 < 1$,商品组合 (x_1, x_2) 这个点的边际替代率大于 1;如果 $x_1 + x_2 = 1$,则 (x_1, x_2) 的边际替代率等于 1。请在埃奇沃思盒状图(10.9 节)中标识出该交换经济中所有的帕累托稳定配置。
8. 有一种不可分割商品的交换经济。假设在一个交换经济 $\langle N, (\geq^i)_{i \in N}, e \rangle$ 中, $N = \{1, \dots, n\}$, n 是奇数。每个人只能消费 0 单位、1 单位或 2 单位的商品 1,但能消费任意数量的商品 2。假设个人 i 的偏好关系可用效用函数 $(t^i x_1 + x_2)$ 表示,其中 $t^1 > t^2 > \dots > t^n > 0$,且个人最初拥有的商品组合为 $(1, M^i)$,其中, $M^i > t^1$ 。请找出该交换经济的竞争性均衡。
9. 价格由一个人决定。假设一个交换经济中有两个人,个人 2 确定一个价格比率,并承诺满足个人 1 在该价格比率上提出的任何交换要求。个人 2 可以预见个人 1 在给定任意一个价格比率时的反应,且选择一个价格比率以使个人 1 提出的交换要求对他自己(个人 2)来说是最优的。请用埃奇沃思盒状图证明以下这两个结论。
 - (1) 这个交易程序所产生的结果可能(一般情况下确实)与竞争性均衡的结果不同。如果两种结果不同,本题中的这个交易程序的结果对个人 2 来说更好。
 - (2) 如果采用此交易程序,命题 10.3 不成立。如果这个交易程序产生的结果是配置 b ,两个人得到的商品组合为 $b(1)$ 和 $b(2)$,那么,个人 2 可以提出另外一个价格,使得两人交易的结果不再是 b ,而且个人 2 可以得到优于 $b(2)$ 的商品组合。

本章说明

竞争性均衡的现代理论由 Walras(1874)最先提出,然后被 Kenneth J. Arrow、Gerard Debreu 和 Lionel McKenzie 等人进一步拓展,可以参见: Arrow 和 Debreu (1954)、Debreu(1959),以及 McKenzie(1954, 1959)。埃奇沃思盒状图(10.9 节)由 Edgeworth(1881:28, 114)提出。

▶ 11

扩展的交换经济模型

在本章中,我们研究交换经济模型的两种变体,以展示该模型的丰富内涵。第一种变体将单一不可分割商品的基本供需模型(你可能在经济学入门课程中已有所了解)纳入该框架之中。第二种变体则利用该框架来刻画个人面对未来资源的不确定性的情境。这一变体被用于分析保险市场和博彩市场。

11.1 包括不可分割商品和货币的市场

在只有一种不可分割商品的市场中,人们用它与货币进行交换。每个人要么购买一单位商品,要么什么也不买。不可能购买多于一单位的商品,也不可能购买一单位商品的一部分。例如,演唱会门票和俱乐部会员都是这种商品。有的人最初拥有一单位的商品,而有的人没有。对每个人来说,拥有一单位商品的价值各不相同,每个人都给一单位商品设定一个货币价值。如果最初拥有一单位商品的人设定的货币价值低于最初未拥有商品的人所设定的货币价值,那么就有可能发生交易。那样的话,双方都可能会因交易受益。我们对谁买了商品、谁卖了商品以及交易价格比较感兴趣。

11.1.1 模型

这个模型由包括两种商品的交换经济变化而来。假设商品 1 是货币,个人可以持有任意一个非负数量的货币;商品 2 是一种不可分割的商品,个人可以拥有(1)或不拥有(0)该商品。因此,一个商品组合即一对 (x_1, x_2) ,其中 x_1 是非负数, x_2 等于 0 或等于 1。正式地表述为,可获得的商品组合的集合(在上一章中,这个集合是 $\mathbb{R}_+^2$)是:

$$X = \{(x_1, x_2) : x_1 \in \mathbb{R}_+, x_2 \in \{0, 1\}\} = \mathbb{R}_+ \times \{0, 1\}$$

假设个人 i 对 X 的偏好可以用效用函数 $(x_1 + v^i x_2)$ 表示,其中 $v^i \geq 0$ 。那么,当且仅当 $s + v^i > t$ 时,个人 i 才会相对于 $(t, 0)$ 更偏好 $(s, 1)$ 。也就是说,当且仅当个

人 i 为获得一单位不可分割的商品花费的钱低于 v^i 单位时, 才会更想拥有这个商品。我们将 v^i 称为个人 i 对该商品的估值。

假设每个最初未拥有商品的人都有足够的货币以支付其对商品的估值, 没有人因货币不足而无法购买一单位的这种商品。也就是说, 如果个人 i 最初拥有的商品组合为 $e(i)$, 且 $e_2(i)=0$, 则我们假设 $e_1(i) \geq v^i$ 。

定义 11.1 包括一种不可分割商品和货币的交换经济

包括一种不可分割商品和货币的交换经济 $\langle N, (v^i)_{i \in N}, e \rangle$ 由以下几部分构成:

个人

一个有限集合 N 。

估值

对每个个人 $i \in N$, 非负数 v^i 表示个人 i 对该商品的估值; 个人 i 对 $X = \mathbb{R}_+ \times \{0, 1\}$ 的偏好关系可由效用函数 u^i 表示: $u^i(x_1, x_2) = x_1 + v^i x_2$ 。

初始配置

函数 e 分配给每个人 i 一个商品组合 $e(i) \in X$, 即个人 i 最初拥有的商品组合, 而且, 如果 $e_2(i)=0$, 则 $e_1(i) \geq v^i$ 。

如果 $e_2(i)=0$, 则个人 i 是(潜在)买家; 如果 $e_2(i)=1$, 则个人 i 是(潜在)卖家。为避免模型退化(即买家和卖家是同一人), 我们假设该交换经济中至少有一个买家和一个卖家。

在前几章讨论的交换经济中, 我们假设不可分割商品仅有一种统一的价格, 个人不能影响其价格, 每个人都认为他可以按该价格交易商品且只能按该价格进行交易。

假设所有交易都以相同的价格进行, 这显然是不合理的。比如, 经济中有两个买家 B_4 和 B_{10} , 对商品的估值分别为 4 和 10; 有两个卖家 S_0 和 S_6 , 对商品的估值分别为 0 和 6。如果 B_{10} 先遇到了 S_6 , 他们可能会以 6 到 10 之间的某一价格进行交易。如果后来 B_4 遇到了 S_0 , 他们可能会以 0 到 4 之间的某一价格进行交易。是否会发生这样的一系列交易, 可能取决于个人拥有的有关其他人估值与其会面方式的信息。例如, 如果 B_{10} 知道 S_0 打算最高以 4 的价格把商品卖出去, 他可能会接触 S_0 并给 S_0 报一个 4 到 6 之间的价格。在本章, 我们不打算将价格是如何形成的这个问题纳入模型, 只是假设价格以某种方式出现并为所有人所知。

至于均衡的概念, 我们可以参考交换经济中竞争性均衡的概念。设货币的价格为 1。那么, 价格系统为 $(1, p)$, 其中, p 是个人购买一单位不可分割的商品所需的货币。购买后, 个人从买家变成卖家。卖家 i 的预算集包括两个商品组合 $(e_1(i), 1)$ (保留这个商品) 和 $(e_1(i) + p, 0)$ (出售这个商品)。如果 $p > v^i$, 卖家会选择出售这个商品; 如果 $p = v^i$, 卖家可以选择出售也可以选择不出售。类似地, 买家 i 的预算集包括两个商品组合 $(e_1(i) - p, 1)$ (购买这个商品) 和 $(e_1(i), 0)$ (不购买这个商品)。如果 $p < v^i$, 买家会购买这个商品; 如果 $p = v^i$, 买家可以购

买也可以不购买这个商品。如果所有买家想要购买的数量总和与所有卖家想要出售的数量总和相等, p 就是均衡价格。

定义 11.2: 包括一种不可分割商品和货币的交换经济的竞争性均衡

包括一种不可分割商品和货币的交换经济 $\langle N, (v^i)_{i \in N}, e \rangle$ 的竞争性均衡为 (p, a) , 其中:

- p 是一个非负数(不可分割的商品的价格)。
- $a = (a(i))_{i \in N}$ 是商品组合的集合。

它们满足下述条件:

最优性

对个人 i 来说, (i) 如果 $p < v^i$, 则 $a_2(i) = 1$; (ii) 如果 $p > v^i$, 则 $a_2(i) = 0$; (iii) $a_1(i) = e_1(i) + p(e_2(i) - a_2(i))$ 。

可行性

$$\sum_{i \in N} a(i) = \sum_{i \in N} e(i)。$$

请注意, 命题 10.1 对当前这个模型同样适用: 如果所有人需要的不可分割商品的数量之和等于可获得的不可分割商品的总量, 即 $\sum_{i \in N} a_2(i) = \sum_{i \in N} e_2(i)$, 那么, 所有人需要的货币总量 $\sum_{i \in N} (e_1(i) + p(e_2(i) - a_2(i)))$ 也等于可获得的货币总量 $\sum_{i \in N} e_1(i)$ 。

回顾我们之前讲的有 4 个人的交换经济。价格 $4 \leq p \leq 6$ 是竞争性均衡 (p, a) 的一部分, 在这个价格下, B_{10} 购买商品, S_0 出售商品, 另外两人不参与交易。如果价格大于 6, 最多有一个人 (B_{10}) 想要购买商品, 但有两单位的商品待出售, 故不存在均衡。同理, 如果价格小于 4, 也不存在均衡。

例 11.1 在包括一个不可分割的商品和货币的交换经济中, 有 14 个卖家, 他们对商品的估值都为 0; 有 17 个买家, 他们对商品的估值都为 100。

如果价格小于 100, 17 个买家都想购买商品, 但只有 14 单位的商品待出售, 故这个经济中不存在均衡。同理, 如果价格大于 100, 没有人想要购买该商品, 故这个经济中也不存在均衡。因此, 唯一可能存在的均衡价格为 100, 14 个卖家选择出售该商品, 而买家认为购买或不购买该商品都差不多。因此, 价格为 100, 14 个卖家出售该商品, 17 个买家中 有 14 个买家购买该商品而其余 3 个买家不购买, 如此形成的 (p, a) 是一个竞争性均衡。

请注意, 如果每个卖家的估值超过所有买家的估值, 则不存在竞争性均衡, 不会有交易发生。均衡价格是处于卖家的最低估值和买家的最高估值之间的某个值。

以下命题证明了竞争性均衡的存在性和特征。

命题 11.1: 竞争性均衡的特征

假设包括一种不可分割商品和金钱的交换经济为 $\langle N, (v^i)_{i \in N}, e \rangle$ 。个人的数量为 n , 并按 1 到 n 将个人编号, $v^1 \geq v^2 \geq \dots \geq v^n$ 。 s 表示卖家的数量(与可获得

的不可分割商品的数量相等)。当且仅当 $v^{s+1} \leq p \leq v^s$ 时, p 是这个交换经济的竞争性均衡价格。

证明: 设 $p \in [v^{s+1}, v^s]$, 配置 a 如下:

个人	$a(i)$
买家 $i \in \{1, \dots, s\}$	$(e_1(i) - p, 1)$
卖家 $i \in \{1, \dots, s\}$	$(e_1(i), 1)$
买家 $i \in \{s+1, \dots, n\}$	$(e_1(i), 0)$
卖家 $i \in \{s+1, \dots, n\}$	$(e_1(i) + p, 0)$

此时, 估值大于 p 的人都属于集合 $\{1, \dots, s\}$, 估值小于 p 的人都属于集合 $\{s+1, \dots, n\}$, 因此, 最优性条件得到满足。 $\sum_{i \in N} a_2(i) = s = \sum_{i \in N} e_2(i)$, 因此这个配置是可行的。所以, (p, a) 是这个交换经济的竞争性均衡。

如果价格高于 v^s , 则它不是均衡价格, 因为在该价格下愿意保留该商品的个人少于 s ; 同理, 如果价格低于 v^{s+1} , 它也不是均衡价格。

评注

1. 这个结论如图 11.1 所示。深灰线表示买家的估值, 按降序排列。每个实线线段的长度是其估值等于该线段高度时买家的数量。同理, 浅灰线表示卖家的估值, 按升序排列。在图 11.1 的左图中, 存在一系列均衡价格, 以黑色加粗线段标示出, 在每个竞争性均衡中商品交易总量为 q^* 。在图 11.1 的右图中, 仅有一个均衡价格 p^* , 但均衡中的商品交易数量有多个。
2. 结果表明, 当且仅当 $v^s = v^{s+1}$ 时, 交换经济中只有一个均衡价格。如果这样, 如图 11.1 的右图所示, 均衡中的商品交易总量不是唯一的。例如, 如果 s 是卖家, $(s+1)$ 是买家, 那么存在一个均衡, 在这个均衡中这两人进行交易; 也存在另外一个均衡, 在这个均衡中这两人不进行交易。

现在, 我们要讨论帕累托稳定的配置的特征, 并将证明, 与第 10 章的模型一

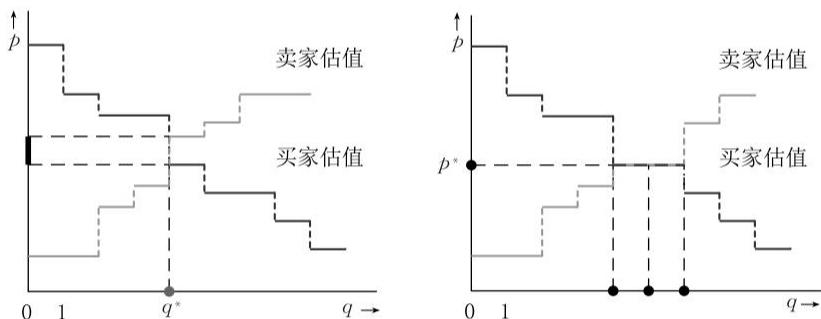


图 11.1 包括一种不可分割商品和货币的交换经济的均衡

注: 浅灰色线代表卖家估值, 深灰色线代表买家估值, 纵轴上的黑色加粗线段和黑色圆点表示均衡价格, 横轴上的黑色圆点表示均衡中的商品交易总量。

样,每个竞争性均衡配置都是帕累托稳定的。

命题 11.2: 帕累托稳定配置

设 $\langle N, (v^i)_{i \in N}, e \rangle$ 是包括一种不可分割商品和货币的交换经济。(1) 对每对 (i, j) , 个人 i 拥有该商品 ($a_2(i)=1$), 个人 j 不拥有该商品 ($a_2(j)=0$), 当且仅当 $v^i \geq \min\{v^j, a_1(j)\}$ 时, 配置 a 是帕累托稳定的。(2) 每个竞争性均衡配置都是帕累托稳定的。

证明: (1) 设在配置 a 中, $a_2(i)=1, a_2(j)=0, v^i < \min\{v^j, a_1(j)\}$ 。设另一个配置 b 只与 a 有一点不同: $b(i)=(a_1(i)+\delta, 0), b(j)=(a_1(j)-\delta, 1)$, 其中 $v^i < \delta < \min\{v^j, a_1(j)\}$ 。配置 b 是可行的且帕累托优于 a , 故 a 不是帕累托稳定的。

设 a 是一个配置, 对于任意一组个人 i 和 j 来说, $a_2(i)=1, a_2(j)=0$, 都有 $v^i \geq \min\{v^j, a_1(j)\}$ 。我们接下来证明 a 是帕累托稳定的。

假配置 b 帕累托优于配置 a 。由 a 和 b 的可行性知, 在 a 中拥有该商品而在 b 中不拥有该商品的个人有 k 个, 与在 b 中拥有该商品而在 a 中不拥有该商品的个人的数量相等 (如图 11.2 所示)。用 v 表示在 a 中拥有该商品的个人的最低估值。

如果 $b_2(i)=a_2(i)$, 则有 $b_1(i) \geq a_1(i)$ 。有 k 个人的 $a_2(i)=1, b_2(i)=0$ 。对于这 k 个人来说, 有 $b_1(i) \geq a_1(i) + v^i \geq a_1(i) + v$ 。有 k 个人的 $a_2(i)=0, b_2(i)=1$ 。对于这 k 个人来说, 有 $b_1(i) + v^i \geq a_1(i)$ 且 $b_1(i) \geq 0$ 。因此, $b_1(i) \geq a_1(i) - \min\{v^i, a_1(i)\}$ 。根据对 a 的假设, 对于在 a 中拥有该商品的所有个人 j 来说, 有 $v^j \geq \min\{v^i, a_1(i)\}$, 于是有 $v \geq \min\{v^i, a_1(i)\}$, 因此 $b_1(i) \geq a_1(i) - v$ 。至少存在一个人使得这个不等式是严格不等式, 因此, $\sum_{i \in N} b_1(i) > \sum_{i \in N} a_1(i)$, 而这与 b 的可行性矛盾。因此, 不存在其他配置是帕累托优于 a 的。

(2) 设 (p^*, a) 是一个竞争性均衡。对任意一个拥有该商品的个人 i , 都有 $v^i \geq p^*$; 对任意一个不拥有商品的个人 j 来说, 有 $v^j \leq p^*$ 。因此, 结论 (1) 意味着配置 a 是帕累托稳定的。

回想一下关于核心的定义。个人集合的某个子集中的人退出交换经济, 并在这个子集中分配其最初拥有的商品组合 (这里指商品和货币), 所分得的商品组合

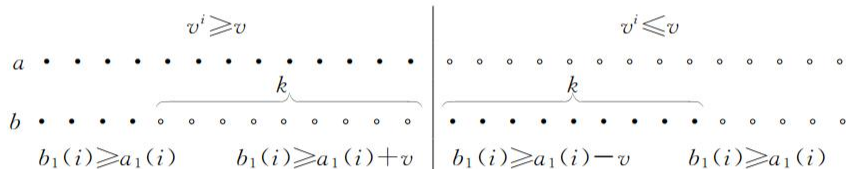


图 11.2 命题 11.1(1)第二部分的证明

注: 黑色圆点表示个人拥有这个不可分割的商品, 空心圆点表示个人不拥有这个不可分割的商品。

优于其在未退出交换经济之前所得的分配——如果不存在这样的子集,那么该配置就处于这个交换经济的核心。命题 10.5 表明,竞争性均衡的配置是交换经济的核心,这对于包括一种不可分割的商品和货币的交换经济也成立(你可以自己证明)。此外,在这种交换经济中,有一个更强的结论:每一个核心配置都是竞争性均衡配置,因此,所有竞争性均衡配置所组成的集合就是核心。

命题 11.3:核心和竞争性均衡

在包括一种不可分割的商品和货币的交换经济中,对于任意一个处于该交换经济核心的配置,都存在一个数值 p 使得 (p, a) 是该经济的竞争性均衡。

证明: 设一个交换经济为 $\langle N, (v^i)_{i \in N}, e \rangle$ 。对每一个个人 i 都有 $a_1(i) + v^i a_2(i) \geq e_1(i) + v^i e_2(i)$, 因为如果该不等式不成立,与在 a 中所得的商品组合相比,个人 i 选择不参与分配时所得的商品组合更好。而且,如果 $a_2(i) = e_2(i)$, 则有 $a_1(i) = e_1(i)$, 因为如果 $a_1(i) > e_1(i)$, 则集合 $N \setminus \{i\}$ 中的个人可以在 a 的基础上通过交易进一步改善状况(a 和 e 中不可分割商品的总量相等,但是 a 中货币的数量更少)。

如果 $a = e$, 则在 a 中拥有该商品的人的估值都至少和不拥有该商品的人的估值一样高,因为如果不是如此,就可以在 a 的基础上通过继续交易进一步改善所有人的状况(假设每个买家至少持有 v^i 单位的货币)。在这种情况下,所有价格 p 与满足 $\max_{i \in N} \{v^i : a_2(i) = 0\} \leq p \leq \min_{i \in N} \{v^i : a_2(i) = 1\}$ 的 a 所组成的 (p, a) 就是一个均衡。

现假设 $a \neq e$ 。令 $B = \{i \in N : e_2(i) = 0, a_2(i) = 1\}$, $S = \{i \in N : e_2(i) = 1, a_2(i) = 0\}$ 。由于 $a \neq e$, 所以 B 和 S 都是非空集合,且由 a 的可行性可知集合 B 和 S 中所含元素数量(即人数)相等。对不在 B 或 S 里的其他人都有 $a(i) = e(i)$ 。

如果对某些卖家 $j \in S$ 和买家 $i \in B$ 来说,有 $a_1(j) - e_1(j) < e_1(i) - a_1(i)$ (卖家 j 收到的钱比买家 i 支付的钱少),那么当 p 取任意一个满足 $a_1(j) - e_1(j) < p < e_1(i) - a_1(i)$ 的值时,相对于在 a 中所得的商品组合集合, $\{i, j\}$ 中的个人 i 更偏好 $(e_1(i) - p, 1)$, j 更偏好 $(e_1(j) + p, 0)$ 。

因此,对所有 $i \in B$ 和 $j \in S$ 都有 $e_1(i) - a_1(i) \leq a_1(j) - e_1(j)$ 。由 a 的可行性可得 $\sum_{i \in B} (e_1(i) - a_1(i)) = \sum_{j \in S} (a_1(j) - e_1(j))$ (对所有 $k \notin B \cup S$ 有 $a_1(k) = e_1(k)$)。因此,对所有 $i \in B$ 来说, $[e_1(i) - a_1(i)]$ 都是一样的;对所有 $j \in S$ 来说, $[a_1(j) - e_1(j)]$ 是也都一样的,且二者相等。我们用 p 来表示这个相等的值。

我们仍需证明 (p, a) 是一个均衡。假设对个人 i 来说,有 $e_2(i) = 0$ 。如果 $v^i < p$, 则 $i \notin B$, 因为如果 $i \in B$, 那么 $a_1(i) = e_1(i) - p$, 可得 $e_1(i) > a_1(i) + v^i$ (买家 i 为购买这个商品支付的钱多于 v^i), 因此,对 i 来说 $e(i)$ 优于 $a(i)$ 。如果 $v^i > p$, 则 $i \in B$, 因为如果 $i \notin B$, 个人 i 可以与任意个人 $j \in S$ 进行交易,所得的商品组合优于个人 i 在 a 中可得的商品组合 $a(i) = e(i)$ 。对任意个人 i 来说,如果 $e_2(i) = 1$, 类似结论成立。

		S	B	
$e:$	• • • •	• • • • • • • • • •	• • • • • • • • • •	• • • •
$a:$	$e(i)$	$a_2(i)=0 \& a_1(i)-e_1(i) \geq v^i$	$a_2(i)=1 \& e_1(i)-a_1(i) \leq v^i$	$e(i)$
		卖家	买家	

图 11.3 命题 11.3 的证明中的集合 S 和集合 B

11.2 有不确定性的交换经济

人们对未来没有把握,常常认为其财富受到未来的不确定性的影响。为了减小不确定性的影响,他们签订与未来状态相关联的支付合同。签订了此类合同,他们就可以相互保险。例如,如果个人 1 在未来状态 A 中拥有较多财富,在未来状态 B 中拥有较少财富,而个人 2 在未来状态 A 中拥有较少财富,在未来状态 B 中拥有较多财富,那么,他们就可以签订一个合同:如果未来状态 A 出现,个人 1 转让部分财富给个人 2;如果未来状态 B 出现,个人 2 转让部分财富给个人 1。在这样的安排下,这两个人都过得更好了。我们在类似于第 10 章的模型中研究这类支付合同的条款。

11.2.1 模型

我们将每种可能的未来状态称为世界的某种状态,或简称为状态。为简单起见,假设只有两种状态(称为状态 1 和状态 2)。所有个人认为状态 k 发生的概率为 π_k ,其中 $\pi_k > 0$ 。也就是说,所有人就每种状态发生的概率达成了一致。每个人可以购买合同,也可以出售合同,合同规定各种不同的状态出现的时候有什么样的报酬。我们通过扩展商品的定义来对这些合同建模:商品 k 指的是如果状态 k 出现,持有这个商品的人会得到 1 单位货币作为报酬,而如果状态 k 不出现,持有这个商品的人得不到任何报酬。因此,如果某个人拥有商品组合 (x_1, x_2) ,这意味着状态 1 出现时他会得到 x_1 单位货币,状态 2 出现时他会得到 x_2 单位货币。每个人 i 开始时拥有的商品组合为 $e(i)$ 。

假设货币给每个人带来的好处或享受程度都跟状态无关。因此,每个人将一个商品组合 (x_1, x_2) 看作一个彩票,有 π_1 的概率得到 x_1 单位货币,有 π_2 的概率得到 x_2 单位货币。特别是,如果 $x_1 = x_2$,那么每种状态下个人能得到的货币都相等,因此,在这种情况下结果是确定的。

假设每个人 i 对彩票的偏好可以用伯努利效用函数 u^i 的期望值表示,于是,他定义在商品组合 (x_1, x_2) 的集合上的偏好可以用效用函数 $U^i(x_1, x_2) = \pi_1 u^i(x_1) + \pi_2 u^i(x_2)$ 表示。假设每个人都是风险厌恶的,于是, u^i 是凹的。为方便起见,我们还假设 u^i 是可微的。个人 i 在 (x_1, x_2) 处的边际替代率为 $\pi_1 u'_i(x_1) / \pi_2 u'_i(x_2)$ 。因此,如图 11.4 所示,如果 $x_1 = x_2$,则边际替代率等于

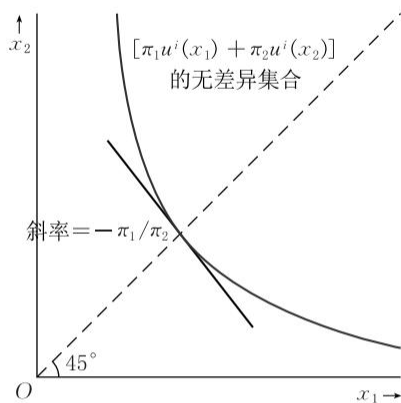


图 11.4 个人的一个无差异集合

注:个人的偏好关系用效用函数 $[\pi_1 u^i(x_1) + \pi_2 u^i(x_2)]$ 表示,其中 u^i 是伯努利效用函数。

π_1/π_2 ;如果 $x_1 < x_2$,则边际替代率大于 π_1/π_2 ;如果 $x_1 > x_2$,则边际替代率小于 π_1/π_2 。

我们要研究以下这个模型。

定义 11.3: 有不确定性的交换经济

一个具有不确定性的交换经济 $\langle N, (u^i)_{i \in N}, (\pi_1, \pi_2), e \rangle$ 包括:

个人

一个有限集合 N 。

效用函数

对每个个人 $i \in N$,可微且凹的函数 $u^i: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (个人 i 的伯努利效用函数)。

状态出现的概率

概率 π_1 和 π_2 之和等于1,即 $\pi_1 + \pi_2 = 1$ (π_k 是所有个人认为状态 k 出现的概率)。

初始配置

函数 e 给每个个人 i 分配一个商品组合 $e(i) \in \mathbb{R}^2$ (即个人 i 最初拥有的商品组合)。

具有不确定性的交换经济的均衡的定义,与交换经济中的竞争性均衡的定义相似。

定义 11.4: 具有不确定性的交换经济的竞争性均衡

一个具有不确定性的交换经济 $\langle N, (u^i)_{i \in N}, (\pi_1, \pi_2), e \rangle$ 的竞争性均衡是交换经济 $\langle N, (\geq^i)_{i \in N}, e \rangle$ 的竞争性均衡,其中,偏好关系 $\geq^i$ 用效用函数 $[\pi_1 u^i(x_1) + \pi_2 u^i(x_2)]$ 表示。

11.2.2 财富分配的不确定性

我们首先研究一种经济,在这种经济中,所有人可得到的货币总数与世界所处

状态无关,但是货币在个人之间的分配随着状态的不同而不同。下面我们要证明:如果每个人都是严格风险厌恶的(其伯努利效用函数是严格凹函数),那么,在竞争性均衡中,他们可以实现完美的相互保险,并且在每种状态下消费的商品组合都是一样的。

命题 11.4:具有不确定性的经济的竞争性均衡

设 $\langle N, (u^i)_{i \in N}, (\pi_1, \pi_2), e \rangle$ 是一个具有不确定性的交换经济,其中 u^i 是严格凹函数。假设 $\sum_{i \in N} e(i) = (c, c)$, $c > 0$ 。这个交换经济有唯一的竞争性均衡 (p, a) ,其中,对每个人来说都有 $p_1/p_2 = \pi_1/\pi_2$,且 $a(i) = (\pi_1 e_1(i) + \pi_2 e_2(i), \pi_1 e_1(i) + \pi_2 e_2(i))$ 。也就是说,每个人将以百分之百的概率得到其最初拥有的期望货币数量。

证明:我们首先来证明 (p, a) 是竞争性均衡。已知 $p_1/p_2 = \pi_1/\pi_2$,所以,如果 $\pi_1 x_1 + \pi_2 x_2 = \pi_1 e_1(i) + \pi_2 e_2(i)$,则 (x_1, x_2) 位于个人 i 的预算约束线上。也就是说,预算约束线上的所有商品组合都表示具有相同期望值的彩票。因此,由于个人 i 是严格风险厌恶的,对他来说最优的商品组合是唯一的,即 $a(i)$,他以百分之百的概率得到 $[\pi_1 e_1(i) + \pi_2 e_2(i)]$ 单位的货币(如图 11.5 所示)。配置 a 是可行的,因为对每个商品 k 都有:

$$\sum_{i \in N} a_k(i) = \sum_{i \in N} (\pi_1 e_1(i) + \pi_2 e_2(i)) = \pi_1 \sum_{i \in N} e_1(i) + \pi_2 \sum_{i \in N} e_2(i) = \pi_1 c + \pi_2 c = c$$

该交换经济中不存在竞争性均衡 (q, b) ,使得 $q_1/q_2 \neq \pi_1/\pi_2$ 成立。如果 $q_1/q_2 < \pi_1/\pi_2$,那么对每个个人 i 来说,最优的商品组合 $b(i)$ 满足 $b_1(i) > b_2(i)$,于是可得 $\sum_{i \in N} b_1(i) > \sum_{i \in N} b_2(i)$,这与可行性条件(每种状态下货币总数相等,都等于 c)相矛盾。同理,如果 $q_1/q_2 > \pi_1/\pi_2$,该交换经济中也不存在均衡。

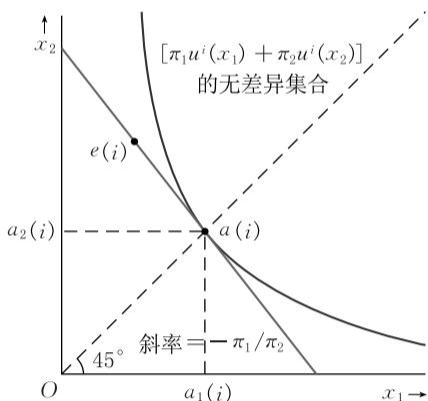


图 11.5 如果 $p_1/p_2 = \pi_1/\pi_2$,那么对于效用函数 u_i 严格凹的个体 i 而言,其最优消费束 $a(i)$ 位于其预算线上,且满足 $a_1(i) = a_2(i)$

11.2.3 集体不确定性

现假设状态 1 是一场灾难,使总财富相对更少,那么,均衡价格比率大于 π_1/π_2 ,且每个人在状态 1 比在状态 2 消费得更少。

命题 11.5:具有不确定性的竞争性均衡

设一个具有不确定性的交换经济为 $\langle N, (u^i)_{i \in N}, (\pi_1, \pi_2), e \rangle$, 其中 u^i 是严格凹函数,且 $\sum_{i \in N} e_1(i) < \sum_{i \in N} e_2(i)$ 。在竞争性均衡 (p, a) 中,对每个人 i 来说都有:(1) $p_1/p_2 > \pi_1/\pi_2$; (2) $a_1(i) < a_2(i)$ 。

证明: (1) 如果 $p_1/p_2 \leq \pi_1/\pi_2$, 那么对个人 i 来说,最优的商品组合 $x(i)$ 满足 $x_1(i) \geq x_2(i)$, 因此可得 $\sum_{i \in N} e_1(i) = \sum_{i \in N} x_1(i) \geq \sum_{i \in N} x_2(i) = \sum_{i \in N} e_2(i)$, 而这与假设(状态 1 的总财富小于状态 2 的总财富)相矛盾。(2) 因为当 $x_1 \geq x_2$ 时 (x_1, x_2) 的边际替代率最大为 π_1/π_2 , 所以根据(1)可以得出 $a_1(i) < a_2(i)$ 。

11.2.4 有一个风险中性的保险公司的经济

现假设每个人拥有一单位财富,如果状态 1 出现,这个单位财富会全部消失。该市场中有一个保险公司,且该保险公司参与很多其他市场的活动。每个市场的风险均与其他市场的风险无关,所以保险公司总体上所面对的风险很小。因此,我们在模型中假设在任何一个给定市场中,该保险公司都追求预期财富 $(\pi_1 x_1 + \pi_2 x_2)$ 最大化。也就是说,我们在模型中设定该保险公司是风险中性的。以下命题表明,在这个经济的竞争性均衡中,风险厌恶的个人可能会获得全额保险(fully insured)或仅获得部分保险(partly insured),具体情况取决于保险公司最初拥有的财富数量。

命题 11.6:市场中有一个保险公司的竞争性均衡

设一个具有不确定性的交换经济为 $\langle N, (u^i)_{i \in N}, (\pi_1, \pi_2), e \rangle$, 其中 $N = \{I\} \cup M$, 保险公司 I 是风险中性的, M 中的 m 个人都是严格风险厌恶的且有相同的严格凹的效用函数 u 。假设 $e(I) = (\alpha, \alpha)$, 对任意个人 $i \in M$ 有, $e(i) = (0, 1)$ 。

- (1) 如果 $\alpha \geq m\pi_2$, 则该经济有唯一一个竞争性均衡 (p, a) , 其中, $p_1/p_2 = \pi_1/\pi_2$, $a(I) = (\alpha - m\pi_2, \alpha + m\pi_1)$, 且对所有个人 $i \in M$ 都有 $a(i) = (\pi_2, \pi_2)$ 。
- (2) 如果 $\alpha < m\pi_2$, 则该经济中有一个竞争性均衡。在任意一个均衡中, $p_1/p_2 > \pi_1/\pi_2$, $a(I) = (0, \alpha(1 + p_1/p_2))$, 且对所有个人 $i \in M$ 都有 $a(i) = (\alpha/m, 1 - \alpha p_1/(m p_2))$ 。

证明: 首先请注意在上述两种情况下,如果 $p_1/p_2 < \pi_1/\pi_2$, 则该经济中不存在均衡,因为在这个价格比率下,有 $a_1(I) > \alpha$, 即保险公司对商品 1 的需求大于该经济中可获得的商品 1 的数量。

(1) 我们首先证明当 $p_1/p_2 = \pi_1/\pi_2$ 时, (p, a) 是唯一的竞争性均衡。在这个价格系统下, 对任意个人 $i \in M$ 来说, 最优的商品组合只有一个: $a(i) = (\pi_2, \pi_2)$ 。给定 $\alpha \geq m\pi_2$, 在任意一个均衡下, 可行性要求保险公司选择商品组合 $a(I) = (\alpha - m\pi_2, \alpha + m\pi_1)$ 。这个商品组合位于保险公司的预算约束线上, 由于位于预算约束线上的商品组合带来的预期效用相同, 所以该商品组合对他来说就是最优的。因此, (p, a) 是唯一的竞争性均衡。

接下来证明这个经济中不存在均衡 (q, b) , 其中, $q_1/q_2 > \pi_1/\pi_2$ 。在这样的价格比率下, 对保险公司 I 来说最优的商品组合为 $(0, \alpha(q_1 + q_2)/q_2)$ (如图 11.6 中的左图所示), 对任意个人 $i \in M$ 来说, 有 $b_1(i) < q_2/(q_1 + q_2)$ (如图 11.6 右图所示)。因此:

$$b_1(I) + \sum_{i \in M} b_1(i) < m \frac{q_2}{q_1 + q_2} = m \frac{1}{1 + q_1/q_2} < m \frac{1}{1 + \pi_1/\pi_2} = m\pi_2 \leq \alpha$$

这与均衡条件(对商品 1 的总需求量等于 α)相矛盾。

(2) 如果价格比率为 π_1/π_2 , 那么这个经济中不存在均衡, 因为在这一条件下, 对任意个人 $i \in M$ 来说最优的商品组合为 (π_2, π_2) , 但由于 $\alpha < m\pi_2$, 这与可行性要求相矛盾。

因此, 在任意一个均衡 (q, b) 中有 $q_1/q_2 > \pi_1/\pi_2$, 保险公司选择 $b(I) = (0, \alpha(q_1 + q_2)/q_2)$ (如图 11.6 中的左图所示)。可行性要求对任意个人 $i \in M$ 都有 $b_1(i) = \alpha/m$ 。因此, 当且仅当 q_1/q_2 等于 M 中的个人在 $(\alpha/m, 1 - \alpha q_1/(mq_2))$ 这个点上的边际替代率时, 价格系统 q 才是均衡的一部分。我们的假设保证了至少存在一个这样的价格系统。从直观上看, 这个结论似乎是合理的, 其证明超出了本书的范围。该证明的中心思想是: 如果 $q_1/q_2 = \pi_1/\pi_2$, 则每个人对商品 1 的需求量为 π_2 ; 如果 q_1/q_2 足够大, 则每个人对商品 1 的需求量为 0, 因此存在某个中间值 q_1/q_2 使得每个人对商品 1 的需求量为 α/m 。

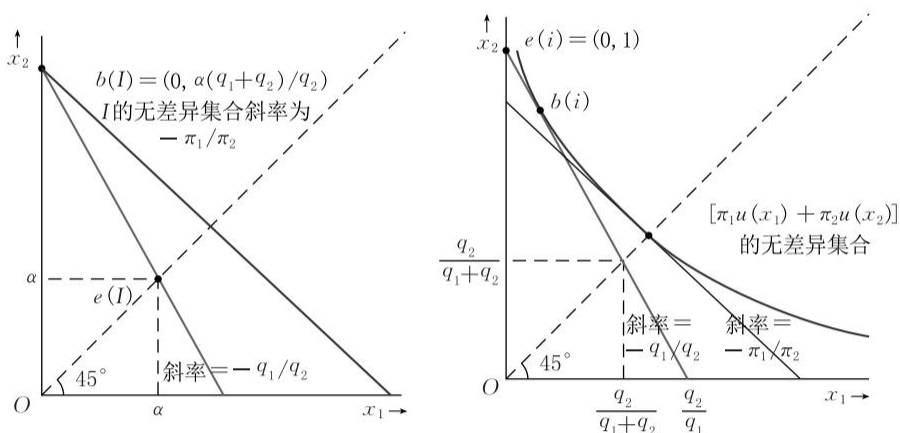


图 11.6 当 $q_1/q_2 > \pi_1/\pi_2$ 时, 保险公司最优的商品组合为 $(0, \alpha(q_1 + q_2)/q_2)$ (如左图所示), 而个人 i 的最优商品组合 $b(i)$ 满足 $b_1(i) < q_2/(q_1 + q_2)$ (如右图所示)

评注

建立和分析模型的目的之一是验证我们对世界的直觉。这个分析可能会加深我们对某些直觉的理解,也可能表明我们的假设不合理。命题 11.6 属于后者。它告诉我们:在竞争性均衡中,保险公司的利润为零,然而,相对于最初拥有的商品组合,所有个人更偏好其在均衡中所得到的商品组合。而我们的直觉会告诉我们,一个大的保险公司会从风险厌恶的个人那里获得巨额利润。显然,命题 11.6 与我们的直觉相矛盾。命题 11.6 依赖于一个假设——市场中唯一的一个大型保险公司认为价格是给定的——这个假设好像不太合理。直觉告诉我们,一家大型的垄断的保险公司能够运用其市场势力,设定一个使得利润为正的价格。

11.2.5 异质性看法

截至目前,我们假设每个人对每种状态出现的可能性的看法一致。以下这个例子的交换经济中,人们对每种状态出现的可能性的看法不尽相同。

例 11.2:具有不确定性和异质性看法的交换经济

在一个具有不确定性的交换经济中,人们对每种状态出现的可能性的判断不同。个人的集合为 $N=\{1, 2\}$, 个人 i 的伯努利效用函数为 $u^i(x)=x$, 最初拥有的商品组合为 $e(i)=(1, 1)$, 个人 i 认为状态 1 出现的概率为 $\pi_1(i)$ 、状态 2 出现的概率为 $\pi_2(i)$ 。下表展示了当人们对各种状态出现的可能性的看法不同时,这个交换经济中存在唯一的竞争性均衡。我们建议你验证一下。

	p	$a(1)$	$a(2)$
$\frac{1}{2} < \pi_1(2) < \pi_1(1)$	$(\pi_1(2), \pi_2(2))$	$(1/\pi_1(2), 0)$	$(2-1/\pi_1(2), 2)$
$\pi_1(2) < \frac{1}{2} < \pi_1(1)$	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$	$(2, 0)$	$(0, 2)$
$\pi_1(2) < \pi_1(1) < \frac{1}{2}$	$(\pi_1(1), \pi_2(1))$	$(2, 2-1/\pi_2(1))$	$(0, 1/\pi_2(1))$

因此,如果两人都认为状态 1 比状态 2 更有可能出现,且个人 1 认为状态 1 出现的概率比个人 2 认为状态 1 出现的概率更高,那么,唯一的均衡价格与个人 2 认为各状态出现的概率相等,此时,个人 1 把全部钱都用来赌状态 1 发生。如果关于哪个状态更有可能出现两人持不同意见,那么,在唯一的竞争性均衡中两人都将把所有财富压在自己认为更可能出现的状态上,一旦这个状态不出现,他将一无所有。

课后习题

11.1 节

1. 均衡中的个人效用的总和最大。请证明:在任意一个包括一种不可分割商品和

货币的交换经济中,达到竞争性均衡时,所有人效用的总和是最大的。

2. 有资金约束的均衡。在一个包括一种不可分割商品和货币的交换经济中,假设每个买家拥有的货币至少和他对该商品的估值一样多。以下表格是该交换经济的一种变体,在这个交换经济中有 5 人,且买家拥有的货币比其对该商品的估值少。假设个人所支出的货币不能超过其最初拥有的数量,请刻画这个经济的竞争性均衡。

i	1	2	3	4	5
v^i	2	10	8	4	6
$e_1(i)$	13	6	5	2	10
$e_2(i)$	0	0	0	1	1

3. 比较静态分析。假设在一个包括一种不可分割商品和货币的交换经济中仅存在一个竞争性均衡,均衡价格为 p^* 。
 - (1) 请证明:如果某个人(买家或卖家)的估值提高,这个交换经济中新的均衡价格至少和 p^* 一样高。
 - (2) 请证明:增加一个买家不能降低该商品的均衡价格;增加一个卖家也不能提高该商品的均衡价格。
4. 可操控性。假设在一个包括一种不可分割商品和金钱的交换经济中仅有一个竞争性均衡价格。在这个交换经济中,如果某人故意让其他人错误判断他对商品的估值,他可以因此而受益。请举一个这样的例子。
5. 交易成本。在一个包括一种不可分割商品和金钱的交换经济中,每个人需要在去市场和待在家里之间作出选择。如果去市场,会遭受数量为 $c > 0$ 的货币损失(可以理解为交易成本)。每个均衡包括两个方面:商品的价格和个人的决策,而每个人有三个选项可选:(1)待在家里,持有其最初拥有的商品组合;(2)去市场,以均衡价格进行交易;(3)去市场但不交易。

均衡需满足的条件:(1)给定商品的价格,每个人的行动(决策)是最优的。(2)去市场且买商品的个人的数量与去市场且卖商品的个人的数量相等。

请证明,任意均衡中的价格与这样一个无交易成本的市场中的均衡价格相同:当前(有交易成本的)市场里对商品估值为 v 的卖家在无交易成本的市场中对商品的估值为 $(v - c)$,而对商品的估值为 v 的买家在无交易成本的市场中对商品的估值为 $(v + c)$ 。

6. 不进入市场的补偿。在包括一种不可分割商品和金钱的交换经济中,对于其中一个人来说,劝说其他人接受以下交易是划算的:“只要你不进入市场参与交易,我就会补偿给你一笔钱,让你比拒绝我而选择进入市场参与交易过得更好”。

11.2 节

7. 异质性看法。在一个具有不确定性的交换经济中有两个人,这两人有相同的伯

努利效用函数 u , 其中 u 是递增、严格凹且可微的。个人 1 认为黄队赢得下场球赛的概率为 t , 个人 2 认为黄队赢得下场球赛的概率为 s , 且 $0 < s \leq t < 1$ 。该经济中的两种商品为两种奖券: 如果黄队赢得比赛, 奖券持有者赢得 1 美元(奖券 A); 如果黄队输了比赛, 奖券持有者赢得 1 美元(奖券 B)。每个人最初拥有这两种奖券各 100 张。

- (1) 如果 $t = s$, 请分析这个市场的竞争性均衡。
 - (2) 如果 $t > s$, 请画图证明: 在竞争性均衡中, 个人 1 拥有的奖券 A 的数量多于其拥有的奖券 B 的数量。
8. 有不确定性和不可分割商品的交换经济。如果天气好, 演出就如期进行; 天气不好就取消演出。每个人要买票才能观看演出, 但如果演出取消, 举办方不会退票给购票者。每个人有一个伯努利效用函数: 如果观看了演出, 函数值为 $(10 + m)$; 如果未观看演出, 函数值为 m , 其中 m 是其所拥有的货币的数量。该交换经济中共有 $n = n_1 + n_0$ 个人, 其中 n_1 个人最初仅有一张票, 但没有货币, n_0 个人最初没有票, 但有一笔钱(金额大于 10)。个人 i 认为演出会如期举办的概率为 t^i , $0 < t^n < t^{n-1} < \dots < t^2 < t^1 < 1$ 。请定义并分析这个交换经济的竞争性均衡。
9. 赌博市场。假设有两名候选人 A 和 B 竞选某一个公职。 n 个人(n 是偶数)对选举结果下注。所有赌博者都是风险中性的。赌博者 i 认为 A 获胜的概率为 a_i , B 获胜的概率为 $(1 - a_i)$ 。每个赌博者要么赌 A 获胜, 要么赌 B 获胜。赌 A 获胜的个人需支付数量为 p 的一笔钱, 在 A 最终获胜后会赢得 1 美元; 赌 B 获胜的个人需支付数量为 $(1 - p)$ 的一笔钱, 在 B 最终获胜后会赢得 1 美元。
- (1) 将这个市场的均衡价格定义为使赌 A 获胜的人数等于赌 B 获胜的人数的价格。如此定义的依据是什么?
 - (2) 如果共有 8 个赌博者, 且 $(\alpha_1, \dots, \alpha_8) = (0.95, 0.9, 0.8, 0.7, 0.6, 0.4, 0.1, 0)$, 请找出均衡价格。
10. 时间偏好。假设经济中存在两种类型的个人; 他们活在两个时期里。第 1 代有 n 个人, 在第 1 期持有 1 美元; 第 2 代有 n 个人, 在第 2 期持有 1 美元。商品组合是一对 (x_1, x_2) , 表示拥有这个商品组合的人在时期 $t = 1, 2$ 时消费 x_t 个单位。每个人的偏好可用效用函数 $U(x_1, x_2) = u(x_1) + \delta u(x_2)$ 表示, 其中, $0 < \delta < 1$, u 递增且是严格凹的。
- (1) 请写出这个交换经济中所有的竞争性均衡。第 1 代人过得比第 2 代人好吗?
 - (2) (选做题) 如果 $u(x) = \sqrt{x}$, 请计算出该交换经济的均衡。

本章说明

把不确定性和交换经济模型结合起来的说法, 最早由 Arrow(1964)提出(最初

以法语发表于 1953 年)。

课后习题第 9 题受艾奥瓦电子市场(Iowa Electronic Markets, IEM)* 的启发(详见 <http://tippie.uiowa.edu/iem/markets/>)。

* 一个在线教学和研究工具。——译者注

包括消费者和生产者的市场

本章从前几章交换经济的模型扩展到涉及商品生产的经济的模型,主要介绍两个模型。但我们不会详细探讨这两个模型,只证明有关均衡的帕累托稳定性的结论。

12.1 生产经济

12.1.1 介绍

假设每一天由上午和下午两部分构成。所有决策者面临相同的价格系统,且这个价格系统在一天中保持不变。每一个生产单位(工厂)由经理决定是否生产,并归消费者所有。每天上午,每个经理选择一个可行的生产计划。我们假设经理的目标是追求每一个生产单位的利润最大化,并假设所有产品都会以给定的价格售出。午饭后,每一个生产单位的利润都被所有者(即消费者)分光。每个人都清楚其从拥有所有权的生产单位中获得的总利润的量。到了下午,每个人从预算集中选择对他来说最优的商品组合,而其预算集由他的收入和经济中的价格系统决定。

如果每个消费者都能选择对他来说最优的商品组合,且生产出的每种产品全部被消费者购买而没有剩余,那么,生产者的决策与消费者的决策就实现了协调一致,此时的价格与均衡一致。如果某些产品有剩余或短缺(货架上仍留有商品没卖出,或货架上的商品已卖空但有些消费者还想买),那么,这个经济就不处于均衡状态,我们预计商品价格会发生变化。

12.1.2 模型

经济中包括两种商品(商品 1 和商品 2),所有消费者组成的集合 I 和所有生产者组成的集合 J 。每个消费者 i 有定义在商品组合的集合 $\mathbb{R}_+^2$ 上的偏好关系 $\succsim^i$,这个偏好关系 $\succsim^i$ 是递增、连续且凸的。每个生产者 j 用其使用的技术刻画,即用其

能生产的所有商品组合的集合 $T(j) \subseteq \mathbb{R}_+^2$ 来表示。每个生产者 j 要做的是在 $T(j)$ 中选择一个元素使其利润最大化。请注意,我们简化掉了生产者做出决定的过程:生产者具有生产能力,仅需选择每种商品各生产多少(而不承担任何成本)。我们假设 $T(j)$ 是技术,其定义如下,图形说明见图 12.1。

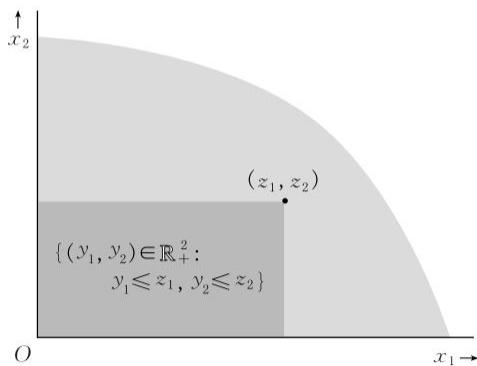


图 12.1 技术的一个示例

注: $\mathbb{R}_+^2$ 的一个闭的、有界的、凸的子集,包括点 $(0, 0)$ 。如果 (z_1, z_2) 属于该集合,且 $y_1 \leq z_1, y_2 \leq z_2$, 每个点 (y_1, y_2) 也属于该集合。

定义 12.1: 技术

技术 T 是一个集合 $T \subseteq \mathbb{R}_+^2$, 该集合是闭的、有界的、凸的, 而且, 如果 $(x_1, x_2) \in T(j)$, $y_1 \leq x_1, y_2 \leq x_2$, 则 $(y_1, y_2) \in T(j)$ (其含义是: 生产者可以自由处置商品)。

每个生产者 j 在决定每种商品分别生产多少时(选择集合 $T(j)$ 中的一个元素, 即 (x_1, x_2)), 认为市场中现行的价格系统 (p_1, p_2) 是给定的, 并追求其产出值(等于生产单位的利润, 因为我们假设不存在生产成本)最大。也就是说, 生产者 j 选择以下问题的解:

$$\max_{x \in T(j)} px$$

其中, $px = p_1x_1 + p_2x_2$ 。

在模型中, 生产单位的利润和消费者的预算集是这样联系起来的: 假设每一个生产单位的利润全部分给所有消费者。 $\alpha(i, j)$ 表示生产者 j 的利润中属于消费者 i 的部分。每一个生产单位的所有利润都分给消费者, 故对任意一个生产者 j 都有 $\sum_{i \in I} \alpha(i, j) = 1$ 。每个消费者的问题是在给定其财富(即所得的总利润)的情况下选择其最偏好的商品组合。请注意, 模型假设所有权比例是固定不变的, 也不考虑所有权是如何决定的。

定义 12.2: 生产经济

一个生产经济 $\langle I, J, (\geq^i)_{i \in I}, (T(j))_{j \in J}, \alpha \rangle$ 包括:

消费者

一个有限集合 I 。

生产者

一个有限集合 J 。

消费者偏好

任意一个消费者 $i \in I$ 有定义在 $\mathbb{R}_+^2$ 上的偏好关系 $\succsim^i$, $\succsim^i$ 是单调、连续且凸的。

技术

任意一个生产者 $j \in J$ 的技术为 $T(j) \subseteq \mathbb{R}_+^2$ (即生产者 j 能够生产的所有商品组合的集合)。

所有权比例

对任意一个消费者 $i \in I$ 和任意一个生产者 $j \in J$, 消费者 i 拥有的生产者 j 的所有权的比例是 $\alpha(i, j) \in [0, 1]$, 且对任意一个生产者 $j \in J$, 都有 $\sum_{i \in I} \alpha(i, j) = 1$; $\alpha(i, j)$ 也表示生产者 j 的利润中由消费者 i 拥有的部分。

经济中一个可行的结果, 由每个生产者和每个消费者选择的商品组合构成, 并使得每种商品的总产量等于总消费量。

定义 12.3: 消费-生产方案

一个生产经济 $\langle I, J, (\succsim^i)_{i \in I}, (T(j))_{j \in J}, \alpha \rangle$ 中的消费-生产方案 (consumption-production plan) 是 (x, y) , 其中 $x = (x(i))_{i \in I}$ 是消费者得到的商品组合, $y = (y(j))_{j \in J}$ 是生产者生产的商品组合, 使得对任意一个生产者 $j \in J$ 有 $y(j) \in T(j)$, 且有 $\sum_{i \in I} x(i) = \sum_{j \in J} y(j)$ 。

在生产经济中, 一个竞争性均衡需包括: 价格体系 $p^* = (p_1^*, p_2^*)$ 、每个消费者 $i \in I$ 决定消费的数量 $x^*(i)$, 以及每个生产者 $j \in J$ 决定生产的数量 $y^*(j)$ 。一个竞争性均衡须满足以下三个条件:

- (1) 对每个消费者 i 来说, 给定 p^* 和收入, 商品组合 $x^*(i)$ 是最优的, 而消费者 i 根据所有权比例分得的生产者利润是其收入。
- (2) 对每个生产者 j 来说, 给定 p^* 和技术 $T(j)$, 商品组合 $y^*(j)$ 使得其利润最大。
- (3) 消费者和生产者所决定的消费和生产的数量的组合是可行的: 这个组合是一个消费-生产方案。

定义 12.4: 生产经济的竞争性均衡

一个生产经济 $\langle I, J, (\succsim^i)_{i \in I}, (T(j))_{j \in J}, \alpha \rangle$ 中, 竞争性均衡是一对 $(p, (x, y))$, 包括:

- 价格系统 $p = (p_1, p_2)$
- 消费者的商品组合 $x = (x(i))_{i \in I}$, 以及生产者的商品组合 $y = (y(j))_{j \in J}$ 使得如下条件满足:

消费者选择的最优性

对每个消费者 $i \in I$ 来说, 在集合 $\{x \in \mathbb{R}_+^2: px = \sum_{j \in J} \alpha(i, j)\pi(j)\}$ 中,

商品组合 $x(i)$ 根据 $\geq^i$ 是最优的, 其中, 对每个 $j \in J$ 来说, 生产者 j 的利润为 $\pi(j) = py(j)$ 。

生产者选择的最优性

对每个生产者 $j \in J$ 来说, 选择商品组合 $y(j)$ 在满足 $z \in T(j)$ 的情况下, 可使 pz 最大。

可行性

(x, y) 是一个消费-生产方案。

可以将帕累托稳定的概念应用于生产经济: 如果不存在另一个消费-生产方案, 它对所有消费者来说都至少一样好且对至少一个消费者来说更好, 那么这个消费-生产方案是帕累托稳定的。

定义 12.5: 帕累托稳定的消费-生产方案

在一个生产经济 $\langle I, J, (\geq^i)_{i \in I}, (T(j))_{j \in J}, \alpha \rangle$ 中, 如果对所有消费者 $i \in I$ 有 $x'(i) \geq^i x(i)$, 且对某些消费者 $i \in I$ 有 $x'(i) >^i x(i)$, 那么消费-生产方案 (x', y') 帕累托优于消费-生产方案 (x, y) 。如果不存在 (x', y') 帕累托优于 (x, y) , 则消费-生产方案 (x, y) 是帕累托稳定的。

12.1.3 竞争性均衡

下面我们证明, 由生产经济的竞争性均衡产生的消费-生产方案是帕累托稳定的 (与第 10 章的交换经济中的命题 10.4 相似)。

命题 12.1: 竞争性均衡的帕累托稳定

由生产经济的任意一个竞争性均衡产生的消费-生产方案都是帕累托稳定的。

证明: 设 $(p, (x, y))$ 是生产经济 $\langle I, J, (\geq^i)_{i \in I}, (T(j))_{j \in J}, \alpha \rangle$ 的一个竞争性均衡。假设另一个消费-生产方案 (x', y') 帕累托优于 (x, y) 。由于竞争性均衡中生产者选择的产量组合是最优的, 于是, 对任意一个生产者 $j \in J$ 都有 $py(j) \geq py'(j)$, 所以有:

$$p \sum_{j \in J} y(j) \geq p \sum_{j \in J} y'(j)$$

同样, 对于每个消费者 $i \in I$ 来说, 都有 $px'(i) \geq px(i)$ [如果 $px'(i) < px(i)$, 那么由于 $x'(i) \geq^i x(i)$ 且 $\geq^i$ 是单调的, 存在一个商品组合 z 使得 $pz < px(i)$ 且 $z >^i x(i)$, 这与 $x(i)$ 是消费者的最优选择相矛盾]。如果 $x'(i) >^i x(i)$ 对某些消费者 i 成立, 一定有 $px'(i) > px(i)$ (否则, $x(i)$ 就不是给定价格系统 p 时的最优商品组合)。因此有:

$$p \sum_{i \in I} x'(i) > p \sum_{i \in I} x(i)$$

但是,均衡的可行性要求 $\sum_{i \in I} x(i) = \sum_{j \in J} y(j)$, 所以:

$$p \sum_{i \in I} x'(i) > p \sum_{i \in I} x(i) = p \sum_{j \in J} y(j) \geq p \sum_{j \in J} y'(j)$$

这与 $\sum_{i \in I} x'(i) = \sum_{j \in J} y'(j)$ 相矛盾。

请注意,以上证明没用到偏好和技术是凸函数这一假设。然而,如果没有这个假设,竞争性均衡可能不存在。假设一个生产经济中有一个生产者和一个消费者,生产者的利润归消费者所有。消费者偏好关系是凸的,且可用函数 $\min\{x_1, x_2\}$ 表示。技术是集合 T , 如图 12.2 所示。对任意一个价格系统,使生产者利润最大的商品组合不是 a 就是 b (或两者都是)。但对任意一个预算集,消费者最优的商品组合中,每种商品的数量是相等的。因此不存在一个价格系统,使得消费者最优的商品组合与生产者最优的商品组合一致,因此,竞争性均衡所要求的条件无法满足。

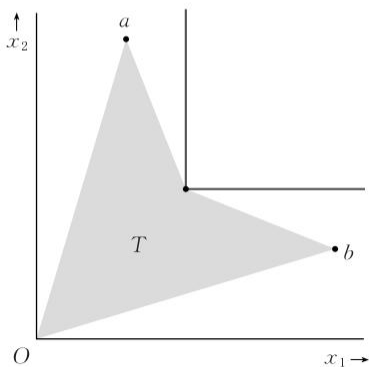


图 12.2 一个消费者和一个生产者组成的生产经济,技术不是凸的

12.2 既有资本又有劳动的经济

12.2.1 介绍

资本家使用工人的劳动来生产产品。面对给定的工人工资水平,资本家决定购买多少劳动时间并投入生产中,资本家所拥有的生产设备就可以生产出一定数量的商品。资本家用部分产出来支付工人的工资,剩余产出则用于自己的消费。工人决定工作多长时间,据此得到相应的工资,然后用所得工资收入进行消费,享受剩余的休闲时间。在均衡处,这个工资水平下工人想要工作的时间,等于资本家想要购买的劳动时间。

12.2.2 模型

假设有两种商品:消费品和休闲时间;有两个人:一个资本家和一个工人。生产设备将一定数量的劳动时间转化为一定数量的消费品。生产函数 f 描述了这个过程:投入 a 单位的劳动时间,生产出数量为 $f(a)$ 的产品。假设 f 是递增的凹函数,且满足 $f(0)=0$ (图 12.3 就是生产函数的一个例子)。

工人总共有个单位的时间,并决定分别用多长时间来休闲和工作。工人对商品组合 $\{(l, y): 0 \leq l \leq 1, y \geq 0\}$ 有偏好关系,其中 l 是用于休闲的时间, y 是所消费商品的数量。我们假设这个偏好关系是单调、连续的凸函数。

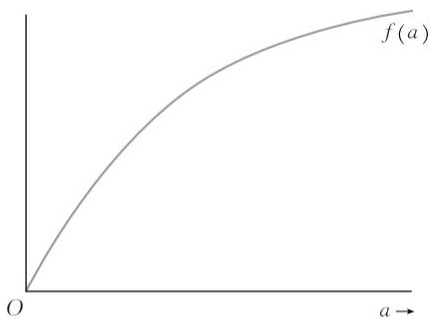


图 12.3 一个生产函数

定义 12.6: 资本家-工人经济

一个资本家-工人经济 $\langle f, \geq \rangle$ 包含:

资本家的技术:

资本家的生产函数是一个递增的凹函数 $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, 其中 $f(0)=0$, 即投入非负数 a (劳动力数量或时间) 可得非负数 $f(a)$ (所生产的消费品的数量)。

工人的偏好:

工人对商品组合 (l, x) 的偏好, 即定义在 $\mathbb{R}_+^2$ 上的偏好关系 $\geq$ 是单调、连续且凸的 (其中, l 是工人用于休闲的时间, x 是他所消费的商品的数量)。

为简单起见, 我们假设工人和资本家都各有一人。但是, 这个模型可以拓展为包括很多资本家和工人的模型。

给定工资水平, 生产者决定要购买多少劳动时间。我们假设生产者追求利润最大化。也就是说, 给定工资水平 w (以单位时间挣得的商品单位数进行度量), 生产者选择使得 $[f(a) - wa]$ 最大化的 a 。工人决定用于休闲的时间 l 是多少, 他选择 l 的值以得到根据其偏好最优的组合 $(l, w(1-l))$ 。

定义 12.7: 消费-生产方案

一个资本家-工人经济 $\langle f, \geq \rangle$ 中的消费-生产方案是指组合 $((l, x), (a, z))$, 该组合中包括的元素有: 工人休闲的时间 l 、工人所消费的商品数量 x 、工人的劳动时间 a 、资本家所消费的商品数量 z , 其中, $a=1-l$, $f(a)=x+z$ 。

下述帕累托稳定性的定义适用于该模型。

定义 12.8: 帕累托稳定性

如果不存在另一个消费-生产方案 $((l', x'), (a', z'))$, 使得 $z' \geq z$ 和 $(l', x') \geq (l, x)$ 同时成立, 且这两个不等式中至少有一个是严格不等式, 则这个资本家-工人经济 $\langle f, \geq \rangle$ 中的消费-生产方案 $((l, x), (a, z))$ 是帕累托稳定的。

竞争性均衡包括工资水平 w^* 、劳动时间 a^* 和工人的消费组合 (l^*, x^*) , 它使得:

- 给定工资水平, (l^*, x^*) 对消费者来说是最优的, 且劳动时间为 a^* 时, 资本家获得的利润最大。
- 工人打算用于劳动的时间等于资本家打算购买的劳动时间。

定义 12.9: 资本家-工人经济的竞争性均衡

一个资本家-工人经济 $\langle f, \geq \rangle$ 的竞争性均衡为 $(w^*, ((l^*, x^*), (a^*, z^*)))$, 它包括工资水平 w^* (正值) 和一对选择: 工人的选择 (l^*, x^*) , 以及资本家的选择 (a^*, z^*) 。这个均衡满足如下条件:

工人选择的最优性

在预算集 $\{(l, x): 0 \leq l \leq 1, x = w^*(1-l)\}$ 中, (l^*, x^*) 是工人根据 $\geq$ 选出的偏好程度最高的那一个元素或消费组合 (给定工资水平, 工人选择他最喜欢的休闲时间长度和消费商品的数量)。

资本家选择的最优性

a^* 使得 $[f(a) - w^*a]$ 最大化 (给定工资水平, 最优劳动时间使得资本家的利润最大化), 且 $z^* = f(a^*) - w^*a^*$ 。

可行性

$((l^*, x^*), (a^*, z^*))$ 是一个消费-生产方案。

图 12.4 展示了一个竞争性均衡。给定工资水平 w^* , 资本家选择最优的工人劳动时间 a^* , 得到产出 $(x^* + z^*)$ 。对工人来说最优的劳动时间为 a^* , 此时他可以得到的收入为 w^*a^* , 其预算集如图 12.4 所示。在这个预算集中, 对消费者来说最优的组合是 (l^*, x^*) 。

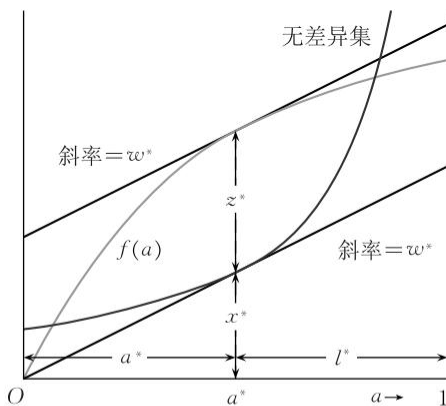


图 12.4 资本家-工人经济中的竞争性均衡

命题 12.2: 竞争性均衡的帕累托稳定性

在资本家-工人经济中, 任意一个竞争性均衡的消费-生产方案都是帕累托稳定的。

证明: 考虑一个竞争性均衡 $(w^*, ((l^*, x^*), (a^*, z^*)))$ 。假设 $((l', x'), (a', z'))$ 是另一个消费-生产方案, 且帕累托优于 $((l^*, x^*), (a^*, z^*))$ 。因此, $z' \geq z^*$ 和 $(l', x') \geq (l, x)$ 都成立, 且这两个不等式中至少有一个是严格不等式。因为在集合 $\{(l, x): 0 \leq l \leq 1, x = w^*(1-l)\}$ 中, (l^*, x^*) 是最优的, 因此 $x' \geq w^*(1-l')$ 。于是, 不等式 $z' \geq z^*$ 和 $x' \geq w^*(1-l')$ 之中, 一定有一个是严格不

等式。由可行性得, $x' + z' = f(a')$ 和 $a' = (1 - l')$ 。因此 $f(a') - w^* a' = f(a') - w^* (1 - l') \geq f(a') - x' = z' \geq z^* = f(a^*) - w^* a^*$, 这些不等式中至少有一个是严格不等式。因此有 $f(a') - w^* a' > f(a^*) - w^* a^*$, 与对资本家来说 a^* 是最优的相矛盾。

在本章最后, 我们再次强调帕累托稳定性不是一个规范性(normative)概念。消费-生产方案是帕累托稳定的, 仅仅意味着任何一个人(资本家或工人)更偏好的别的方案对于其他人来说都是更差的。竞争性均衡可能是公平的, 也可能是不公平的; 一些法规(例如设定最低工资)可能会导致消费-生产方案不是帕累托稳定的, 但却是更公平的。

课后习题

- 比较优势 and 专业化。假设经济中有两种商品, 所有个人组成的集合为 $N = \{1, \dots, n\}$ 。每个人既是消费者也是生产者。个人 i 从集合 $T(i) = \{(y_1, y_2) : t^i y_1 + y_2 \leq c^i\}$ 中选择一个商品组合, 其中 c^i 和 t^i 为正的常数, $t^1 < t^2 < \dots < t^n$ 。每个人都可以按市场价格, 用自己生产的商品组合去交换另一个商品组合。
 - 在给定价格体系 p 时, 定义个人 i 的价格-生产-消费方案为 $(x(i), y(i))$, 其中 $y(i) \in T(i)$ 且 $p x(i) = p y(i)$ 。请写出此时的竞争性均衡的含义。
 - 请证明: 给定价格体系 (p_1, p_2) , 满足 $t^i < p_1/p_2$ 的个人仅生产商品 1, 满足 $t^i > p_1/p_2$ 的个人仅生产商品 2, 满足 $t^i = p_1/p_2$ 的个人认为所有价格-生产-消费方案都是无差异的。
 - 请证明: 如果所有人的偏好相同, 且其偏好关系可用效用函数 $(t x_1 + x_2)$ 表示, 那么该经济中存在一个竞争性均衡, 而且在这个均衡中每个人都消费自己生产的商品组合。
 - 假设 $n=2$, 且每个人的偏好可用效用函数 $\min\{x_1, x_2\}$ 表示。在某个经济中, $t^1 < t^2$ (个人 1 生产商品 1 有比较优势)。这个经济中存在一个竞争性均衡, 在该均衡中个人 1 生产两种商品。请举出一个这样的经济的例子。
- 追求产出最大化的资本家-工人经济。假设在一个资本家-工人经济中, 资本家在利润非负的前提下追求产出最大化(详见 6.2 节)。画图说明该经济的竞争性均衡(可参考图 12.4)。这个均衡一定是帕累托稳定的吗?
- 资本家-工人经济中的技术进步。在一个资本家-工人经济中(其中资本家追求利润最大化), 如果发生技术进步, 则竞争性均衡可能会改变, 使得资本家或工人的状况更糟。请举出一个这样的例子。
- 生产链。假设一个经济中有两个生产者。生产者 1 投入自己的劳动时间生产商品 X , 投入 t 单位时间可得的产量为 $f(t)$ 。生产者 2 投入商品 X 以生产商品 Y , 其生产函数是 g 。 f 和 g 都是递增、可微且严格凹的。生产者 1 对 Y 和休闲时间的组合的偏好是可微、单调且凸的。生产者 2 要选择投入品 X 的数量, 以

追求利润最大化。每个生产者垄断其技术。

一个竞争性均衡应包括：(1)用商品 Y 的数量表示的商品 X 的价格 p^* ；(2)生产者 1 用于生产商品 X 的时间 t^* ；(3)生产者 2 投入的商品 X 的数量 x^* 。如果下面三个条件满足，那么 (p^*, t^*, x^*) 就是一个竞争性均衡：(1)给定 p^* ，生产者 1 做出的决定是他最偏好的；(2)生产者 2 做出的决定使得其利润最大化；(3)生产者 1 对 X 的供给量等于生产者 2 对 X 的需求量。

请证明该经济的竞争性均衡是帕累托稳定的。

5. 污染。在一个经济中，如果一个人的行为可以直接影响另一个人，则竞争性均衡有可能不是帕累托稳定的。为证明这一点，我们假设经济中有两种商品、 N 个生产者和 N 个消费者。每个生产者的生产技术为 $T = \{(y_1, y_2) : 2y_1 + y_2 = 2\}$ (无生产成本)，生产者追求自身利润最大化。生产者的利润平均分配给所有消费者。消费商品 2 会产生污染。表示污染严重程度的污染指数的值，等于商品 2 的人均消费量的 1.5 倍。每个消费者的效用函数为 $(x_1 + x_2 - z)$ ，其中 z 是污染指数。选择商品组合时，消费者认为污染指数是给定的 (当 N 很大时这个假设是比较合理的)。请给对称性竞争性均衡下一个恰当的定义，其中的“对称性”是指所有的消费者选择相同的商品组合，所有的生产者选择相同的技术 (T 中的同一个元素)。请证明：所有的对称性竞争性均衡都不是帕累托稳定的。

▶ 13

价格与预期均衡

到目前为止,在我们所探讨的市场模型中,均衡价格使所有个人的决策协调一致。每个人在做出决定时都把价格当成给定的,而且,当价格等于均衡价格时,每种商品的供给和需求相等。

在本章中,个人的行为不仅受价格影响,还受他对其他因素的预期的影响。每个人都把这些预期当成给定的,就像价格被每个人当成给定的一样。在均衡时,每个人做出的决定对他来说都是最优的,每种商品的供给和需求都相等,且每个人的预期都是正确的,都与现实相符。

我们将介绍三个模型。在第一个模型中,个人从两个银行网点中选择一个,具体选择哪个网点仅受对每个网点所需服务时间的预期的影响。在第二个模型中,想要购买二手车的人无法知道待售二手车的质量,买车时不仅要考虑二手车的价格,也要考虑其对这些二手车平均质量的预期。在第三个模型中,捕鱼的单位成本取决于捕鱼总量。每个渔民在决定要捕多少鱼时,把鱼的价格和对捕鱼单位成本的预期当成给定的。

13.1 银行网点之间的顾客分布

13.1.1 介绍

人们居住在城镇的一条长街上。这条街的两端各有一个银行网点。每个人只关心他去银行办理业务所花费的时间,即从家到银行所花费的时间和在银行等待时间的总和。在每个网点的等待时间取决于选择去该网点办理业务的人数;每个人对在网点的等待时间有自己的预期。在均衡时,每个人的预期都是正确的。我们想知道均衡中两个网点分别有多少人光临。

13.1.2 模型

我们将个人居住的街道设置为一个单位区间 $[0, 1]$,两个网点位于两个端点 0

和1处。所有个人组成的集合为 $[0, 1]$,可以理解为个人 z 位于值为 z 的点处。因此对任意一个人 $z \in [0, 1]$,在所有人中有比例为 z 的人位于个人 z 的左边,有比例为 $(1-z)$ 的人位于个人 z 的右边。我们假设个人的集合是无限的,这个假设的目的在于刻画这样一种情境:由于个人数量很多,每个人的行为对在银行网点的等待时间的影响可忽略不计,尽管等待时间取决于所有人的行为。

在每一个网点的等待时间取决于选择该网点的人数。具体来说,如果选择网点 j (即网点位于值为 j 的点, $j=0$ 或 $j=1$)的人数为 n_j ,那么,顾客在该网点的等待时间为 $f_j(n_j)$ 。我们假设 f_j 是递增、连续的,且 $f_j(0)=0$ (即如果该网点中没有顾客,则等待时间为0)。

为简单起见,我们假设个人 x 从家到网点 z 的路上所花费的时间等于 x 到 z 的距离 $d(z, x)=|z-x|$ 。从家到网点的路上所花费的时间加上在网点等待的时间即为个人去银行处理业务所耗费的总时间,每个人都会选择耗费的总时间最小的网点。

定义 13.1:服务业经济

一个服务业经济 $\langle B, I, (f_j)_{j \in B}, d \rangle$ 包括:

银行网点

一个集合 $B=\{0, 1\}$ 。

个人

一个集合 $I=[0, 1]$ 。

等待时间

选择网点 j 的人数为 n_j 时,在网点 j 的等待时间即为 $f_j(n_j)$,它是一个连续递增函数 $f_j:[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$,其中 $f_j(0)=0, j=0, 1$ 。

偏好

每个人 $i \in I$ 都希望耗费的时间最少,个人 i 选择去网点 j 所耗费的时间为 $[d(i, j)+t_j]$,其中, t_j 是在支网点 j 的等待时间, $d(i, j)=|i-j|$ 。

请注意,在这个模型中银行网点不是决策者:网点的位置和由等待时间函数表示的服务技术是不变的。模型中唯一的决策者是个人。

13.1.3 均衡

我们按定义竞争性均衡的思路来定义本模型的均衡。每个人对等待时间有自己的预期,且假设个人选择哪一个网点不会影响其等待时间。这个假设与我们之前定义竞争性均衡时的假设(消费者和生产者把价格当成给定的,忽略其行为对价格的影响)类似。给定个人对等待时间的预期,个人会选择办理一次业务所花费的总时间最短的那个网点。在均衡时,个人的预期被证明是正确的。这个定义背后暗含了一个假设:个人的错误预期会导致结果不稳定。为了稳定性,我们不仅要求个人选择的网点对他来说是最优的,而且要求个人对等待时间的预期是正确的。

一个均衡包括如下要素:两个数值 t_0 和 t_1 (即个人对在网点 0 和网点 1 等待时间的预期);一个函数 $l: [0, 1] \rightarrow \{0, 1\}$, 该函数表示在点 x 的人选择去哪个网点 $l(x)$ (值为 0 或 1)。

均衡需满足如下两个条件:

- (1) 给定个人对在两个银行网点的等待时间的预期, 每个人选择的网点对他来说都是最优的。
- (2) 个人的决策和预期是一致的, 意思是给定银行的服务技术(用等待时间函数表示)和选择各网点的人数, 每个人对在每个网点的等待时间的预期是正确的。

定义 13.2: 服务业经济的均衡

一个服务业经济 $\langle B, I, (f_j)_{j \in B}, d \rangle$ 的均衡为是一组 $((t_0, t_1), l)$, 包括一对数值 (t_0, t_1) (即顾客在 0 和 1 两个银行网点的等待时间) 和函数 $l: I \rightarrow B$ (将任意个人 $x \in I$ 分给一个网点), 使得:

个人选择的最优性

$$l(x)=0 \Rightarrow x+t_0 \leq (1-x)+t_1$$

$$l(x)=1 \Rightarrow (1-x)+t_1 \leq x+t_0$$

(如果每个人被分给某一个银行网点, 说明从他家到该网点的路上所花费的时间加上在该网点的等待时间, 小于等于从他家到另一个网点的路上所花费的时间加上在该网点的等待时间)

一致性

对任意一个银行网点 $j \in B$, 有:

$$t_j = f_j(\alpha(l, j))$$

其中 $\alpha(l, j)$ 是由函数 l 分配给银行网点 j 的人数占总人数的比例。

13.1.4 分析

在本小节, 我们将证明该模型中存在均衡, 讨论均衡的特点, 并证明均衡是帕累托稳定的。我们首先要证明, 存在一个唯一的点 z^* 使得: 位于 z^* 左边的所有人选择去网点 0; 位于 z^* 右边的所有人选择去网点 1; 位于 z^* 点上的个人认为这两个网点对他来说都一样。

引理 13.1 存在一个唯一的值 z^* 使得 $z^* + f_0(z^*) = 1 - z^* + f_1(1 - z^*)$ 。

证明: 显然, 函数 $[z + f_0(z)]$ 是连续、递增的, z 取 0 时该函数的值等于 0, z 取 1 时该函数的值等于 $[1 + f_0(1)]$ 。函数 $[1 - z + f_1(1 - z)]$ 是连续、递减的, z 取 0 时该函数的值等于 $[1 + f_1(1)]$, z 取 1 时该函数的值等于 1。从图形上很容易看出, 这两个函数有唯一一个交点。

接下来, 我们要证明, 给定任意的预期等待时间, 如果在点 x 的个人认为网点 0 至少和网点 1 一样好, 那么所有位于 x 左边的个人相对于网点 1 更偏好网点 0

(如果在 x 点的个人认为网点 1 至少和网点 0 一样好,那么所有位于 x 右边的个人相对于网点 0 更偏好网点 1)。

引理 13.2 给定任意一组对于在网点 1 和网点 2 的等待时间的预期,如果对于在点 x 上的个人来说网点 0 至少和网点 1 一样好,那么,对于每个在 y 点上 ($y < x$) 的个人来说,网点 0 优于网点 1;如果对在 x 点的个人来说,网点 1 至少和网点 0 一样好,那么,对于每个在 y 点 ($y > x$) 的个人来说,网点 1 优于网点 0。

证明: t_0 和 t_1 分别表示在两个网点的等待时间。对在点 x 上的个人来说,如果网点 0 至少和网点 1 一样好,则需:

$$t_0 + d(x, 0) \leq t_1 + d(x, 1)$$

如果 $y < x$,有 $d(y, 0) < d(x, 0)$ 且 $d(y, 1) > d(x, 1)$,可得 $t_0 + d(y, 0) < t_1 + d(y, 1)$ 。同理可证另一种情况。

现在我们可以证明在这个服务业经济中均衡是存在的且是唯一的。

命题 13.1:服务业经济的均衡

在每一个服务业经济中都存在一个唯一的均衡(给定在某个点上做出选择的模型设定)。

证明:首先,我们证明每个服务业经济中存在一个均衡。设 z^* 是引理 13.1 中给定的数值。令 $(t_0^*, t_1^*) = (f_0(z^*), f_1(1 - z^*))$, l^* 是一个函数,它使得位于 $[0, z^*]$ 的个人选择网点 0,位于 $(z^*, 1]$ 的个人选择网点 1。下面我们证明 $((t_0^*, t_1^*), l^*)$ 是一个均衡。

个人选择的最优性

由于 $z^* + t_0^* = z^* + f_0(z^*) = 1 - z^* + f_1(1 - z^*) = 1 - z^* + t_1^*$ (由 z^* 的定义可知), z^* 觉得选择网点 0 还是网点 1 对他来说没什么差别。由引理 13.2 可知,位于 z^* 左边的所有人相对于网点 1 更喜欢网点 0,位于 z^* 右边的所有人相对于网点 0 更偏好网点 1。

一致性

选择网点 0 的个人所占比例 $\alpha(l^*, 0)$ 为 z^* ,因此 $t_0^* = f_0(z^*) = f_0(\alpha(l^*, 0))$ 。同理,选择网点 1 的个人所占比例为 $(1 - z^*)$,可得 $t_1^* = f_1(1 - z^*) = f_1(\alpha(l^*, 1))$ 。

接下来,我们证明这个均衡是唯一的。首先,请注意该服务业经济中不存在这样一种均衡:所有人都选择去其中一家网点,而另一家网点无人光顾。因为如果存在这样的均衡,那么没人去的这家网点的等待时间为 0,而另一家网点的等待时间大于 0,那么距离没人去的这家网点更近的个人就会选择去这家网点,而不是另外那家所有人都选择的网点。

设 $((t_0, t_1), l)$ 是一个均衡。由引理 13.2 可知,存在一点 z 使得所有位于点 z 左边的个人选择网点 0,所有位于点 z 右边的个人选择网点 1。因此位于点 z 的个人认为这两家网点是无差异的,即 $z + t_0 = 1 - z + t_1$,由引理 13.1 得 $z = z^*$ 。因此,函数 l 和 l^* 是一样的,都由点 z^* 决定。由均衡的一致性条件可得: $t_0 = f_0(z^*)$ 且 $t_1 = f_1(1 - z^*)$ 。

下面我们定义服务业经济的帕累托稳定性,并证明该服务业经济的均衡是帕累托稳定的。

定义 13.3: 帕累托稳定性

考虑一个服务业经济为 $\langle B, I, (f_j)_{j \in B}, d \rangle$ 。对任意一个分配规则 l 和个人 $x \in I$, 定义 $L_x(0, l) = x + f_0(\alpha(l, 0))$ 为给定其他人根据分配规则 l 做出选择的情况下, 个人 x 选择网点 0 时会遭受的损失。同理可定义 $L_x(1, l) = 1 - x + f_1(\alpha(l, 1))$ 。

如果对于所有 $x \in I$, 不存在有哪个分配规则 l' 帕累托优于分配规则 l , 即对于所有 $x \in I$ 都有 $L_x(l'(x), l') \leq L_x(l(x), l)$, 且对于某些 $x \in I$ 有 $L_x(l'(x), l') < L_x(l(x), l)$, 那么, 分配规则 l 是帕累托稳定的。

命题 13.2: 服务业经济中的均衡是帕累托稳定的

在服务业经济中每一个均衡都是帕累托稳定的。

证明: 令 $((t_0^*, t_1^*), l^*)$ 是服务业经济 $\langle B, I, (f_j)_{j \in B}, d \rangle$ 的一个均衡。设 l' 是一个分配规则。如果选择两家网点的个人所占比例在 l 和 l' 中相同, 那么由这两个分配规则决定的等待时间是相同的。由于所有人在 l^* 中做出的选择是最优的, 所以分配规则 l' 不可能帕累托优于 l^* 。

如果按照 l' 分配, 将会比按照 l^* 分配使得更多人到网点 0 (举例而已), 那么原本会被 l^* 分配到网点 1 的一些人会被 l' 分配到网点 0。在均衡时, 这些人对网点 1 的偏好程度高于或等于对网点 0 的偏好程度。分配规则为 l' 时, 这些人对网点 0 的偏好程度更低, 因为分配规则为 l' 时网点 0 的等待时间大于分配规则为 l^* 时网点 0 的等待时间。因此, l' 不可能帕累托优于 l^* 。

13.2 信息不对称和逆向选择

13.2.1 介绍

同一型号的那些二手车的质量可能会相差很大。每个车主都清楚车子的质量, 但买家不清楚车子的质量。由于买家无法分辨这些车子质量的好坏, 所以每辆车的价格是一样的。每个车主在给定价格下决定是否出售其车子。每个买家是买车还是不买, 主要取决于他对于待售二手车质量的预期。买家可能会认为待售二手车的质量差, 因为给定统一价格, 高质量二手车的车主很可能不愿意卖。车主选择出售的二手车一般都是低质量的, 这种现象通常被称为逆向选择。

13.2.2 模型

市场中个人所组成的集合包括由所有车主组成的有限集 S 和由所有潜在买家组成的更大的有限集 B 。任意一个卖家 $i \in S$ 拥有一辆质量为 $Q(i) \in (0, 1]$ 的车

子, 卖家 i 清楚车子的质量。拥有一辆质量为 q 的二手车的车主如果决定不卖车, 其效用为 q ; 如果决定按价格 p 出售这辆二手车, 则其效用为 p 。每一个潜在买家如果按价格 p 购买一质量为 q 的二手车, 则其效用为 $(\alpha q - p)$, 其中, $\alpha > 1$; 如果决定不买, 则其效用为 0。我们假设 $\alpha > 1$, 这意味着双方都受益的交易是可能发生的: 与卖家相比, 买家对二手车的估值更高。

买家在把车买下来之前不知道也无法确定某一型号的二手车的质量, 卖家无法将有关其车子质量的信息有效地传达给买家, 而且买家不相信卖家给出的有关车子质量的信息。因此, 对于想要买车的人来说, 购买二手车就相当于买一张彩票, 其奖金对应于二手车的质量。我们假设买家追求预期效用最大化, 因此其是否买车的决定取决于对于待售二手车质量的预期 $\hat{q}$; 如果买车花的钱少于 $\alpha \hat{q}$, 它就愿意购买该二手车。

定义 13.4: 二手车市场

一个二手车市场 $\langle S, B, Q, \alpha \rangle$ 包括:

车主

一个有限集 S , S 中每个车主都拥有一辆二手车。

买家

一个有限集 B , 且 $|B| > |S|$ 。 B 中每个买家最多购买一辆二手车。

质量

二手车质量函数 $Q: S \rightarrow (0, 1]$, 其中 $Q(i)$ 是卖家 i 拥有的二手车的质量。

偏好

对于质量为 q 的二手车车主来说, 卖车可得到的金钱为 p 。如果 $p > q$ 则该车主愿意把车卖出去; 如果 $p < q$, 则该车主宁愿不卖车。

如果 $\alpha \hat{q} > p$ 则潜在买家愿意买车; 如果 $\alpha \hat{q} < p$ 则潜在买家宁愿不买车。如果 $\alpha \hat{q} = p$, 则潜在买家认为买不买车子都一样, 其中, $\alpha > 1$, p 是潜在买家买车花的钱, $\hat{q}$ 是潜在买家对于待售二手车质量的预期。

13.2.3 均衡

有两个参数决定买家和车主的行为: 二手车的价格, 以及潜在买家对于待售二手车质量的预期。均衡包括价格 p^* 、潜在买家对于待出售车子质量的(共同)预期 q^* 、卖车的车主的集合、买车的潜在买家的集合, 使得:

- (1) 给定 p^* 和 q^* , 每一个车主和每一个潜在买家的决定都是最优的;
- (2) 待售二手车的数量等于想要购买二手车的买家的数量;
- (3) 如果至少有一辆车完成交易, 买家对于二手车质量的预期是正确的(如果没有交易发生, 则买家对二手车质量的预期不受此限制)。

定义 13.5: 二手车市场的均衡

二手车市场 (S, B, Q, α) 的均衡 (p^*, q^*, S^*, B^*) 包括一个数值 $p^* \geq 0$

(二手车的价格)、一个数值 $q^* \geq 0$ (潜在买家对于待售二手车质量的预期), 集合 $S^* \subseteq S$ (卖车的车主的集合)、集合 $B^* \subseteq B$ (决定买车的潜在买家的集合), 并满足如下条件:

选择的最优性

对于潜在买家来说: 如果 $B^* \neq \emptyset$ 则 $p^* \leq \alpha q^*$; 如果 $B \setminus B^* \neq \emptyset$ 则 $p^* \geq \alpha q^*$ 。
对于车主来说: 如果车主 $i \in S^*$ 则 $p^* \geq Q(i)$; 如果车主 $i \in S \setminus S^*$ 则 $p^* \leq Q(i)$ 。

一致性

$|S^*| = |B^*|$ (卖车的车主的数量等于买车的买家的数量)。

如果 $S^* \neq \emptyset$ 则 $q^* = \sum_{i \in S^*} Q(i) / |S^*|$, 即 S^* 中的车主拥有的二手车的平均质量 (潜在买家对于待售二手车质量的预期是正确的)。

当 $\emptyset \subset B^* \subset B$ 时, 可得 $p^* = \alpha q^*$, 均衡如图 13.1 所示。

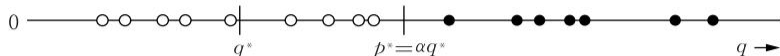


图 13.1 二手车市场的均衡

注: 每个实心圆点都表示一辆二手车; 空心圆点表示待出售的二手车。

13.2.4 分析

我们下面证明这个二手车市场存在一个均衡, 而且, 在均衡中有交易发生 (即决定卖车的车主的集合是非空的)。

命题 13.3: 二手车市场的均衡

设 $\langle S, B, Q, \alpha \rangle$ 是一个二手车市场, 并给车主编号, 得到 $S = \{s_1, \dots, s_{|S|}\}$, $Q(s_1) \leq Q(s_2) \leq \dots \leq Q(s_{|S|})$ 。这个二手车市场有一个均衡 (p^*, q^*, S^*, B^*) , 其中, $S^* \neq \emptyset$ 。在任意一个均衡中, 已售出的二手车的质量不高于其他未售出的二手车的质量。

证明: 对于 $m = 1, \dots, |S|$, 将二手车按质量由低到高排序, 设 $A(m)$ 是前 m 辆二手车的平均质量: $A(m) = \sum_{i=1}^m Q(s_i) / m$ 。给定 $\alpha > 1$, 因此, $\alpha A(1) > Q(s_1)$ 。令 m^* 是满足 $\alpha A(m) \geq Q(s_m)$ 的最大的 m 。设 $p^* = \alpha A(m^*)$, $q^* = A(m^*)$, $S^* = \{s_1, \dots, s_{m^*}\}$; 设 B^* 是 B 的子集, B^* 中有 m^* 个买家, 那么 (p^*, q^*, S^*, B^*) 是一个均衡。下面我们来证明买家和卖家的选择对他们来说都是最优的。请注意对任意一个 $m \leq m^*$, 有 $p^* = \alpha q^* = \alpha A(m^*) \geq Q(s_{m^*}) \geq Q(s_m)$, 故任意一个车主 $s_1, \dots, s_{m^*}$ 最好的选择是出售其车子。同样, 对所有 $m \geq m^* + 1$, 有 $p^* = \alpha A(m^*) \leq \alpha A(m^* + 1) < Q(s_{m^*+1}) \leq Q(s_m)$, 故任意一个车主 $s_{m^*+1}, \dots, s_{|S|}$ 最好的选择是不出售其车子。由于 $\alpha q^* = p^*$, 每一个潜在买家都认为买不买都一样。

在均衡中, 车主做出的选择对他来说是最优的, 这可以推出命题 13.3 最后的结论。选择卖车的车主所拥有的车子质量最高为 p^* , 而那些选择不卖车的车主所拥有的车子的质量最低为 p^* 。

每一个二手车市场也可能有这样一个均衡: 没有汽车交易。设价格 p^* 是一个正数, $Q(s_1)$ 是最差的二手车的质量, p^* 为正且小于 $Q(s_1)$ 。设 q^* 满足 $\alpha q^* < p^*$ 。那么, $(p^*, q^*, \emptyset, \emptyset)$ 就是这个二手车市场的一个均衡: 给定买家对于待售车子平均质量的预期, 没有一个潜在买家愿意支付 p^* 买车; 没有一个车主的车子质量差到他以 p^* 的价格出售是划算的。在这个均衡中, 潜在买家预期的二手车的平均质量, 低于所有待售二手车的最低质量。请注意, 如果没有车主想要卖车, 那么均衡的定义对买家对于二手车质量的预期没有任何限制。但是, 我们对预期 q^* 的这种假设是不合理的。举例来说, 如果潜在买家知道所有待售二手车的质量在哪个范围内, 那么买家对待售二手车的预期质量也将在这个范围内, 这种情况下没有交易发生的均衡是不存在的。

请注意, 除非 $S^* = S$, 否则命题 13.3 的证明中构造的均衡不是帕累托稳定的。如果 $S^* \subset S$, 假设一个车主拥有的二手车的质量为 q 且尚未售出, 一个潜在买家还未购买车子, 这个车主将其二手车卖给这个买家, 以赚得数量在 q 到 αq 之间的一笔钱, 那么车主和买家都会过得更好。

对于某些二手车市场, 在所有均衡中, 只有质量最低的车被卖出去。举个例子, 假设车子质量的集合是 $\{1, 2, \dots, |S|\}$, 且 $\alpha < \frac{4}{3}$ 。在达到均衡时, 存在一个数值 m^* , 使得 S^* 包括拥有车子的质量为 $1, 2, \dots, m^*$ 的车主, 且 $m^* \leq \alpha q^*$, 其中, q^* 是待出售车子的平均质量, 即 $\frac{1}{2}(1+m^*)$ 。只有 $m^* = 1$ 时, 才满足 $m^* \leq \frac{1}{2}\alpha(1+m^*) < \frac{2}{3}(1+m^*)$ 。

13.3 渔业经济

13.3.1 介绍

一个社区中住着消费者和渔民, 且该社区邻近一个湖泊。给定鱼的价格, 每个渔民决定捕多少鱼, 每个消费者决定买多少鱼。捕鱼的数量越多, 捕鱼的成本就越高。在均衡中, 渔民捕鱼的数量与消费者购买的数量相同。当渔民捕鱼数量太多时, 如果渔民少捕点鱼, 价格会不会调整得使所有人变得更好?

13.3.2 模型

渔业经济中个人的集合包括消费者的集合 I 和渔民的集合 J 。每个渔民决

定捕多少鱼,其捕鱼数量有个上限 L 。如果所有渔民捕鱼的总量为 T ,那么,当一个渔民的捕鱼数量为 x 时,其成本为 $c(T)x$,其中,函数 c 是连续的、递增的,且 $c(0)=0$ 。也就是说,捕鱼总量越大,捕鱼的单位成本就越高。每个消费者决定消费多少鱼,消费上限为 1 单位。每个消费者的偏好都可以用效用函数 $(vx+m)$ 表示,其中, $v>0$, m 是消费者拥有的货币的数量, x 是消费者消费的鱼的数量。

为更好地理解本节的重点,我们做以下几个简化假设:(1) $c(|J|L)>v$ (如果所有渔民都达到捕鱼上限,那么捕鱼的单位成本超过了一单位的鱼对消费者的价值);(2) $c(0)<v$ (如果所有渔民都不捕鱼,那么捕鱼的单位成本小于一单位鱼对消费者的价值);(3) $|J|L\leq |I|$ (如果所有渔民都达到捕鱼上限,那么,捕鱼的总量小于消费者的最大消费量)。

定义 13.6: 渔业经济

渔业经济 $\langle I, J, v, L, c \rangle$ 包括:

消费者

一个有限集合 I 。

渔民

一个有限集合 J 。

消费者偏好

$v>0$, 即消费者对一单位鱼的估值。消费者的偏好可由效用函数 $(vx+m)$ 表示,其中, m 是消费者拥有的货币数量, $x\in[0, 1]$ 是消费者消费的鱼的数量。

渔民的技术

用一个数值 $L(0<L\leq |I|/|J|)$ 和一个递增且连续的函数 $c:[0, |J|L]\rightarrow\mathbb{R}$ 表示,其中, $c(0)<v$, $c(|J|L)>v$ (一个渔民最多可以捕捞 L 单位的鱼,且如果所有渔民捕捞总量为 T ,那么捕捞 y 单位鱼的那个渔民需承担成本 $c(T)y$)。

13.3.3 均衡

渔业经济的均衡包括:一单位鱼的价格、渔民们预期捕一单位鱼所花的成本、每个渔民捕鱼的数量,以及每个消费者购买的鱼的数量。还需满足如下条件:

- (1) 给定鱼的价格和渔民们对单位捕鱼成本的预期,每个渔民决定捕鱼的数量以使自己利润最大化。
- (2) 给定鱼的价格,每个消费者决定消费鱼的数量。
- (3) 渔民们对捕鱼单位成本的预期与现实一致。
- (4) 渔民们的捕鱼总量与消费者们的消费总量相等。

定义 13.7: 渔业经济的竞争性均衡

渔业经济 $\langle I, J, v, L, c \rangle$ 的一个竞争性均衡 (p^*, c^*, y^*, x^*) 包括:一个正数 p^* (一单位鱼的价格)、一个非负数 c^* (渔民们对捕鱼的单位成本的预期)、一个非负数 y^* (每个渔民捕鱼的数量)以及一个非负数 x^* (每个消费者消费鱼的数量)。

量),使得:

选择的最优性

对消费者来说:在 $[0, 1]$ 中非负数 x^* 使其效用 $(vx - p^*x)$ 最大化。

对渔民来说:在 $[0, L]$ 中,非负数 y^* 使其利润 $(p^*y - c^*y)$ 最大化。

可行性

$|I|x^* = |J|y^*$ (渔民们的捕鱼总量与消费者们的消费总量相等)。

一致性

$c^* = c(|J|y^*)$ (渔民们对单位捕鱼成本的预期与现实一致)。

13.3.4 分析

命题 13.4: 渔业经济的竞争性均衡

渔业经济 $\langle I, J, v, L, c \rangle$ 有唯一一个竞争性均衡 (p^*, c^*, y^*, x^*) , 其中 $p^* = v = c^* = c(|J|y^*)$ 且 $|I|x^* = |J|y^*$ 。

证明: 首先, 给定 $c(0) < v$, $c(|J|L) > v$ 且 c 是连续的, 所以存在一个数值 y^* 使得 $c(|J|y^*) = v$ 。现在, 给定 $c(|J|y^*) = v$, 且 $c(|J|L) > v$ 且 c 是递增的, 所以, $y^* < L$; 由假设 $L \leq |I|/|J|$, 可得 $x^* < 1$ 。 (p^*, c^*, y^*, x^*) 是一个均衡, 因为所有消费者和渔民认为自己可能做出的所有选择都是无差异的, 渔民捕鱼总量与消费者的购买总量相等, 且渔民对单位成本的预期与现实相符。

为证明这个渔业经济不存在其他均衡, 假设 (p', c', y', x') 是另外一个均衡。

如果 $p' > v$, 那么每个消费者一条鱼也不会买, 于是 $x' = y' = 0$ 。此时 $c' = c(0) < v$, 每个渔民的最优选择是捕捞 L 单位的鱼, 但这不符合可行性条件。

如果 $p' < v$, 那么每个消费者会购买 1 单位的鱼, 即 $x' = 1$, 由可行性条件可得, $y' = |I|/|J|$ 。由一致性条件可得 $c' = c(|I|)$; 再由假设 $|J|L \leq |I|$ 可得, $c(|I|) \geq c(|J|L) > v$ 。因此, 对任意一个渔民来说, 其最优选择都是不捕鱼。

因此, $p' = v$ 。接下来证明 $c' = p'$ 。由一致性条件可得 $v = c(|J|y')$, 由可行性条件可得 $|J|y' = |I|x'$ 。如果 $c' > p'$, 那么由渔民选择的最优性可得 $y' = 0$, 因此 $x' = 0$, 消费者选择的最优性要求 $p' \geq v$ 成立, 这意味着 $c' > p' \geq v$ 成立。但现在由一致性条件可得 $c' = c(0) < v$, 存在矛盾。同理可证 $c' < p'$ 也是不可能的。

由以下证明可知, 这个竞争性均衡不是帕累托稳定的。设 (p^*, c^*, y^*, x^*) 是一个竞争性均衡。此时, 每个消费者的效用为 $vx^* - p^*x^* = 0$, 每个渔民的利润为 $p^*y^* - c(|J|y^*)y^* = 0$ 。现在考虑一组新的值 $\hat{y}$ 和 $\hat{k}$, 满足 $0 < \hat{y} < y^*$, $c(|J|\hat{y}) < \hat{k} < v$ 。此时, 每个渔民捕鱼数量为 $\hat{y}$, 其收入为 $\hat{k}\hat{y}$ 。每个消费者消费 $\hat{y}|J|/|I|$ 单位的鱼且花费 $\hat{k}\hat{y}|J|/|I|$ 。这个产量-消费量方案使得所有消费者的效用和所有渔民的利润都为正。

许多经济学家(包括马丁·J. 奥斯本, 但不包括阿黑尔·鲁宾斯坦)用这个模

型论证其主张:通过税收实施再分配能使所有人(即渔民和消费者)变得更好。假设每个渔民每捕捞一单位鱼需支付的税收为 $t = v - c(|J|\hat{y})$ (其中 $0 < \hat{y} < y^*$), 那么, 在均衡中渔民捕鱼的单位成本为 $[c^* + v - c(|J|\hat{y})]$ 。征税后, 捕鱼总量为 T 时, 捕鱼的单位成本从 $c(T)$ 变为 $d(T) = c(T) + v - c(|J|\hat{y})$, 所以有 $d(|J|\hat{y}) = v$ 。因此由命题 13.4 可知, 在征收捕捞税的经济体中, 存在唯一一个均衡, 每个渔民捕捞 $\hat{y}$ 单位的鱼, 消费者支付的价格为 v , 且每个消费者购买 $\hat{y}|J|/|I|$ 单位的鱼。在这个均衡中, 每个消费者的效用和每个渔民的利润都等于 0。征收到的税款可在消费者和渔民之间重新分配, 使得每个消费者的效用和每个渔民的利润都为正。

课后习题

1. 服务业经济。

- (1) 一个服务业经济为 $\langle B, I, (f_j)_{j \in B}, d \rangle$, 另一个服务业经济与 $\langle B, I, (f_j)_{j \in B}, d \rangle$ 相比仅有一点不同: 以等待时间表示的服务技术函数为 $\hat{f}_0$ 。而不是 f_0 , 且对所有 $x > 0$ 都有 $\hat{f}_0(x) < f_0(x)$ (即网点 0 变得更有效率)。请证明第二个服务业经济的均衡中选择网点 0 的人多于第一个服务业经济的均衡中选择网点 0 的人。
- (2) 请证明: 如果网点 0 比网点 1 更高效, 即对任意一个人 $x > 0$ 都有 $f_0(x) < f_1(x)$, 那么, 均衡中网点 1 的等待时间大于网点 0 的等待时间。
- (3) 一些证据表明有些人经常会高估某些活动(如去银行办理业务)所需的时间(示例详见: Jones and Hwang, 2005)。假设一个人去银行实际耗费的总时间为 t , 而预期去银行需耗费的总时间为 λt , 其中 $\lambda > 1$ 。这种情况下的均衡会有什么不同?
- (4) 如果个人仅高估其在网点中的等待时间, 而对其路上所耗费的时间预估准确, 均衡又会如何变化?

2. 服务业经济均衡中的总损失。有一个服务业经济, 假设所有位于 z 左边的个人选择网点 0, 而位于 z 右边的其他人选择网点 1。那么所有个人所花费的总时间为:

$$\int_0^z [x + f_0(z)] dx + \int_z^1 [(1-x) + f_1(z)] dx$$

虽然由命题 13.2 可知均衡是帕累托稳定的, 但是均衡可能不会(且通常也不会)使得所有人所耗费的总时间最小, 这是为什么? (如果你愿意, 可计算一个服务业经济的均衡, 在该服务业经济中, $f_0(x) = x$, $f_1(x) = 2x$ 。请证明如果耗费的总时间最少, 选择两个银行网点的人数与均衡配置中去两个网点的人数不同。)

3. 筹款晚会。有 1 200 个人出席了筹款晚会, 每个人都可以选择一个标记了 L 或

H 的抽奖券。在标记 L 的抽奖券中随机抽取一张, 它的持有者获得奖金 L , 在标记了 H 的抽奖券中随机抽取一张, 它的持有者获得奖金 H , 其中, $0 < L < H$ 。每个人 i 定义在抽奖券集合上的偏好可用伯努利效用函数 u^i 的预期值表示, 且 $u^i(0) = 0$, $u^i(H) = 1$, $u^i(L) = v$, 其中 $0 < v < 1$ 。

(1) 按本章的思路, 给本题中的均衡下个定义。

(2) 如果 $v = \frac{1}{3}$, 均衡是什么?

4. 配对。所有的个人可以分为两种类型: 类型 A 有 a 人, 类型 B 有 b 人, 且 $a \geq b$, 每个人都希望与和自己类型不同的人配对。一个人仅能与一个其他人配对。有两个地点(地点 1 和地点 2)可供人们选择, 但每个人只能在这两个地点中选择一个。给定类型 A 有 α 个人、类型 B 有 β 个人选择了某一地点, 那么类型为 A 的个人在该地点配对成功的概率为 $\min\{\alpha, \beta\}/\alpha$, 类型为 B 的个人在该地点配对成功的概率为 $\min\{\alpha, \beta\}/\beta$ 。每个人都会选择可使其配对成功的可能性最大的地点。

(a_1, b_1, a_2, b_2) 是一组非负实数, 其中 $a_1 + a_2 = a$, $b_1 + b_2 = b$, a_i 和 b_i 分别为选择地点 i 的人中类型为 A 的个人的数量和类型为 B 的个人的数量。为简单起见, 我们不要求这四个数是整数。均衡应该包括 (a_1, b_1, a_2, b_2) 和一个非负向量 (p_1, p_2, q_1, q_2) , 其中, $p_1 + p_2 = 1$, $q_1 + q_2 = 1$, p_i 是地点 i 处类型为 A 的个人配对成功的概率, q_i 是地点 i 处类型为 B 的个人配对成功的概率。它还满足以下两个条件:

最优性

如果某些类型为 A 的个人选择地点 i ($a_i > 0$), 那么 $p_i \geq p_j$, 其中 $j \neq i$; 如果某些类型为 B 的个人选择地点 i ($b_i > 0$), 那么 $q_i \geq q_j$ 。

一致性

$p_i = \min\{1, b_i/a_i\}$ 且 $q_i = \min\{1, a_i/b_i\}$, 其中 $i = 1, 2$ (令 $\min\{1, 0/0\} = 0$; 如果 $x \neq 0$, 令 $\min\{1, x/0\} = 1$)。

- (1) 请证明: 如果 (a_1, b_1, a_2, b_2) 满足 $b_1/a_1 = b_2/a_2 = b/a$, (p_1, p_2, q_1, q_2) 满足 $p_i = b/a$, $q_i = 1$ (其中 $i = 1, 2$), 那么, 这是一个均衡。
- (2) 如果每种类型的人都有一半的人分别在两个地点, 此时的均衡是什么?
- (3) 请找出一个均衡, 该均衡中每个人都选择地点 1。
5. 医疗卫生服务。考虑一个医疗服务市场, 市场中人数众多, 共有 n 个人; 每个人有 m 单位的货币。每个人可以购买一定数量的医疗卫生服务。如果个人 i 购买 $y(i)$ 单位医疗卫生服务, 那么他存活的概率为 $\alpha(y(i), y^*)$, 其中 y^* 是所有人购买的医疗卫生服务的平均水平。虽然 y^* 受个人行为的影响, 但是每个人都认为 y^* 是给定的。 α 是递增的凹函数。每个人都希望自己所剩的货币和存活概率的乘积最大。也就是说, 个人会选择使得 $(m - p^* y(i))\alpha(y(i), y^*)$ 最大的 $y(i)$ 。

- (1) 假设函数 α 是可微的。如果所有人购买的医疗卫生服务的数量都为正, 请写出这个均衡。
- (2) 请解释一下, 为什么该均衡不是帕累托稳定的?

本章说明

13.2 节的模型由 Akerlof(1970)提出。

► 14

信息不对称的市场

我们在本章将讨论的均衡的概念与第9章至第12章中讨论的竞争性均衡的概念有所不同。前几章的模型明确指出了在市场中参与交易的经济主体的集合,并且均衡给出了使得这些经济主体的总供给和总需求相等的交易条件(价格)。而我们在本章所讨论的模型没有明确设定经济主体的集合。所以,本章的均衡的概念更加抽象:如果所有提出合约的经济主体都不想撤销合约,且没有一个经济主体可以因再多提出一个合约而获利,那么这组合约就是一个均衡。

我们将把这个概念应用于信息经济学中的重要模型。本章的课后习题还展示了这个概念在其他方面的应用。

14.1 基础模型

为更好地解释均衡概念背后的逻辑,我们从不存在信息不对称的简单劳动力市场模型开始。在这个模型中,市场里有两类人:雇主和工人。雇主发布工资报价。工人是同质的,且(如果被雇用)其生产率等于 $v > 0$ 。每个工人要么选择一个对他来说最优的工资报价,要么(如果所有工资报价对他来说都不如不工作)根本不工作。选择某工资报价的工人与发布这个工资报价的雇主相匹配,此时,工人的产出为 v 并得到雇主提供的工资。雇主向工人支付工资 w ,其利润为 $(v-w)$ 。

我们假设:如果一个工资报价在工资的集合 W 中是最高的,则在给定工资集合时, W 中的这个工资报价(非负数)对工人来说是最优的(假设不接受任意一个工资报价相当于得到的工资为0)。均衡是工资报价组成的一个有限集 W ,其中:

- (1) W 中的每个工资报价对某一个工人来说是最优的;
- (2) W 中没有一个工资报价使得发布这个报价的雇主受到损失;
- (3) 给定 $W \cup \{w\}$ 中的工资报价,不存在 $w \notin W$ 对工人来说是最优的且使得发布这个报价的雇主所得的利润大于0。

条件(1)的意思是不能被任何工人接受的工资报价会被淘汰掉,从市场中消失。条件(2)要求任意一个被接受的工资报价都不会对发布该工资报价的雇主造成损失。条件(3)要求没有一个雇主可以发布一个新的工资报价,使得该工资报价

对某个工人来说是最优的,且该雇主因此获得的利润大于0。

本章中的均衡概念与我们前几章所学的均衡概念不同,并没有具体说明哪些人做出了什么选择。此时的均衡是市场上能被接受的合约的集合,并不涉及谁发布了哪个报价。

由一个工资报价 v 组成的集合 $\{v\}$ 就是一个均衡。工人们的最优选择是接受这个报价,因为这比不接受报价更好;提出这个报价的雇主的利润为0;且其他报价要么无人接受(小于 v),要么被接受但提出这个报价的雇主的利润为负(大于 v)。

事实上, $\{v\}$ 是唯一的均衡。设 W^* 是一个均衡。如果 $W^* = \emptyset$, 那么给定集合 $W^* \cup \{w\} = \{w\}$, 任意一个工资报价 w ($0 < w < v$) 都是最优的, 且发布这个报价的雇主的利润大于0, 这与条件(3)相矛盾。由条件(1)可得, 如果 $W^* \neq \emptyset$ 则 W^* 仅包括一个工资报价, 假设为 w^* 。由条件(2)可得 $w^* \leq v$ 。如果 $w^* < v$, 那么给定集合 $W^* \cup \{w\}$, 工资报价 w ($w^* < w < v$) 对工人来说是最优的, 且使得发布这个报价的雇主的利润大于0, 这与条件(3)相矛盾。因此, 只能有 $w^* = v$ 。

14.2 加入教育因素的劳动力市场

想象一下, 在一个劳动力市场中, 雇主在雇佣工人之前不清楚工人的生产能力, 但是知道工人的教育背景。如果教育可以提高生产能力, 雇主会更愿意给受过更高教育的人支付更高的工资。在接下来要讨论的模型中, 我们假设教育不影响生产能力, 但是生产能力与获得教育的成本负相关: 一个工人的生产能力越强, 他的受教育成本就越低。在这个假设下, 我们预期雇主愿意给受过高水平教育的工人支付高工资, 因为他们认为只有生产能力强的工人接受高水平教育才是划算的。在均衡中, 工资和教育之间的这种关系是否存在?

假设有两种类型的工人: H 和 L 。如果被雇佣, 类型为 H 的工人创造的产出价值为 v_H , 类型为 L 的工人创造的产出价值为 v_L , 且 $0 < v_L < v_H$ 。全部工人中, 类型为 L 的工人所占比例为 α_L , 类型为 H 的工人所占比例为 α_H , 且 $\alpha_H + \alpha_L = 1$ 。所有雇主在雇佣工人之前都无法得知每个工人属于哪一种类型。

如果一个雇主提供工资 w , 接受这份工作的工人有 γ_H 的概率是类型 H , 有 γ_L 的概率是类型 L , 那么这个雇主得到的预期利润为 $(\gamma_H v_H + \gamma_L v_L - w)$ 。如果一个合约仅包括一个工资报价, 那么由 14.1 节的讨论可知仅存在一个均衡 $\{\bar{v}\}$, $\bar{v} = \alpha_H v_H + \alpha_L v_L$, 也就是一个工人的预期生产能力。

现在, 我们在模型中加入教育。每个工人选择一个教育水平, 这个教育水平不影响其生产能力。受教育成本是教育水平的线性函数, 且类型为 L 的工人(生产能力更低)比类型为 H 的工人的受教育成本更高。具体来说, 类型为 X 的工人, 受教育年限为 t 年, 所得工资为 w , 其收入为 $(w - \beta_X t)$, 且 $0 < \beta_H < \beta_L$ 。

雇主可以观察到工人的教育水平, 但无法得知其生产能力。合约规定的内容

包括一个工资报价和最低受教育年限。

看到不同的合约,工人会在选择教育水平时考虑不同教育水平下他能获得的最高工资。因此,工人的决策是在其所有可得到的合约中选择一个(或选择不工作)。我们假设工人对合约的偏好是词典式偏好:首先会选择收入最高的工作(同时考虑该工作所需的教育成本),在收入相同的合约中则更偏好对教育水平要求更低的工作。因此,没有一个工人认为两个合同是无差异的。

定义 14.1:信息不对称的劳动力市场

一个信息不对称的劳动力市场为 $(v_L, v_H, \alpha_L, \alpha_H, \beta_L, \beta_H)$,其中 $0 < v_L < v_H, \alpha_L \geq 0, \alpha_H \geq 0, \alpha_L + \alpha_H = 1, 0 < \beta_H < \beta_L$ 。这个市场中包括雇主和工人两类人,工人又分为两种类型。

类型 L(所占比例为 α_L)

生产能力为 v_L ,单位教育成本为 β_L 。

类型 H(所占比例为 α_H)

生产能力为 v_H ,单位教育成本为 β_H 。

一个合约就是一对非负数 (t, w) , t 是该工作要求的最低教育年限, w 是工资。

下面我们具体说明工人对合同的偏好。

定义 14.2:工人的偏好

在一个信息不对称市场 $(v_L, v_H, \alpha_L, \alpha_H, \beta_L, \beta_H)$ 中,类型为 $X(=H, L)$ 的工人如果接受合约 (t, w) ,其收入为 $(w - \beta_X t)$ 。类型为 X 的工人定义在合约的集合上的偏好关系 $\geq^X$ 是词典式偏好:工人首先考虑收入 $(w - \beta_X t)$,更偏好收入更高的合约;如果收入相同,再看其要求的最低教育年限 t ,更偏好 t 更小的合约。

对任意一个合约的集合 C ,在给定集合 C 时,类型为 $X(=H, L)$ 的工人的最优选项为:

$$\begin{cases} (t, w) \in C & \text{如果 } w - \beta_X t \geq 0 \text{ 且对所有 } (t', w') \in C \text{ 都有 } (t, w) \geq^X (t', w') \\ \phi & \text{如果对所有 } (t', w') \in C \text{ 有 } w' - \beta_X t' < 0 \end{cases}$$

其中, ϕ 的意思是该工人不接受任何一份合约。

图 14.1 展示了每种类型的工人的等收入线。黑色线是类型为 L 的工人的等收入线,斜率为 β_L 。在该线上每增加一单位的教育,工资需增加 β_L 以弥补教育所花费的成本,以使得工人的收入保持不变。灰色线是类型为 H 的工人的等收入线,斜率为 β_H 。每种类型的工人的收入都向西北方向递增:每个工人都更偏好要求更低教育年限且提供更高工资的合约。

给定所有合约的集合为 C ,如果一个雇主提供一份合约 $c = (t, w)$,而合约 c 对某些工人来说是在集合 C 中的最优选择,那么,雇主的预期收益取决于这些工人的类型。如果对所有工人来说合约 c 都不是最优的,那么雇主的利润为0;如果只有对 X 类型的工人来说合约 c 才是最优的,那么雇主的利润为 $(v_X - w)$,即雇佣一个 X 类型的工人所得的利润;如果 c 对所有工人来说都是最优的,那么雇主的利润为 $(\alpha_L v_L + \alpha_H v_H - w)$ 。

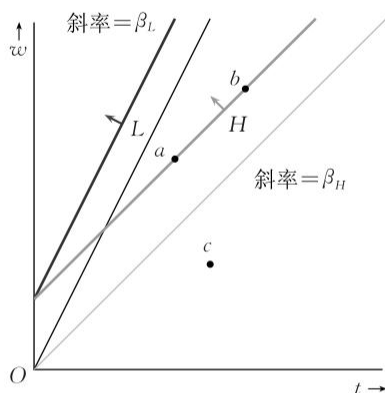


图 14.1 工人的等收入线

注:在黑色线上,类型为 L 的工人的收入相同;在灰色线上,类型为 H 的工人的收入相同。线条更粗的线表示的工资更高。类型为 H 的工人相对于合约 b 更偏好合约 a , 因为 a 要求的最低教育年限更低, 且在这两个合约中他能获得的收入相同。如果市场中只提供 c 一份合约, 两种类型的工人都不会接受, 因为 c 使得其收入为负。

定义 14.3: 雇主的利润

在一个信息不对称的劳动力市场 $(v_L, v_H, \alpha_L, \alpha_H, \beta_L, \beta_H)$ 中, 对于任意合约的集合 C 和任意一个合约 $c = (t, w) \in C$, 如果 C 是所有合同的集合, 那么提供合约 c 的雇主的利润 $\pi(c, C)$ 为:

$$\begin{cases} 0 & \text{, 如果对所有类型的工人来说合约 } c \text{ 都不是集合 } C \text{ 中最优的} \\ v_X - w & \text{, 如果仅对类型为 } X \text{ 的工人来说合约 } c \text{ 是集合 } C \text{ 中最优的} \\ \alpha_L v_L + \alpha_H v_H - w & \text{, 如果对两种类型的工人来说合约 } c \text{ 都是集合 } C \text{ 中最优的} \end{cases}$$

未提供合约的雇主的利润为 0。

均衡 一个均衡是合约的有限集合 C^* , 它满足如下条件: (1) 给定 C^* 时, C^* 中的每一个合约对至少一种类型的工人来说是最优的; (2) C^* 中所有合约都不会使雇主的利润为负; (2) 在集合 $C^* \cup \{c\}$ 中, 不存在一个合约 $c \notin C^*$ 对至少一种类型的工人来说是最优的且使得雇主的利润为正。

请注意, 均衡的概念反映了一个假设: 正在考虑提供一个新合约的雇主能够正确预测他的新合约对于哪种类型的工人是最优的 (当其他雇主提出的合约是给定的)。

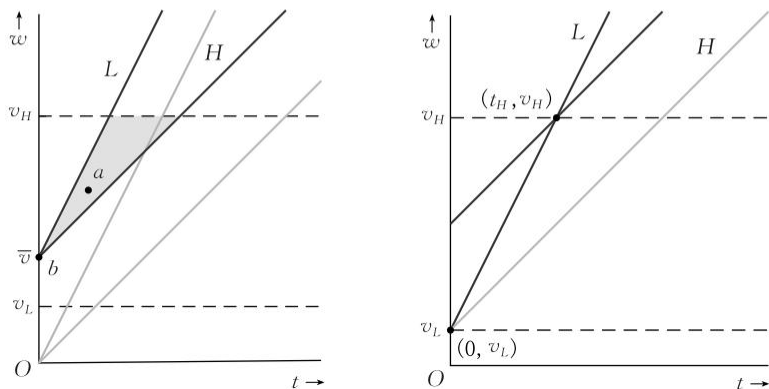
定义 14.4: 劳动力市场的均衡

一个信息不对称的劳动力市场 $(v_L, v_H, \alpha_L, \alpha_H, \beta_L, \beta_H)$ 的均衡是合约的有限集合 C^* , 它满足如下条件:

- (1) 在集合 C^* 中, 每个合约 $c \in C^*$ 都对至少一种类型的工人来说是最优的;
- (2) 如果 $c \in C^*$, 那么 $\pi(c, C^*) \geq 0$ (没有一个雇主想要撤销其合约);
- (3) 如果 $c \notin C^*$, 且在集合 $C^* \cup \{c\}$ 中, 合约 c 对某类型的工人来说是最优的, 那么有 $\pi(c, C^* \cup \{c\}) \leq 0$ (没有一个雇主想要再提供一个新合约)。

在集合 C^* 中,如果两种类型的工人的最优合约相同,那么均衡 C^* 是混合均衡(pooling equilibrium);在集合 C^* 中,如果两种类型的工人的最优合约不同,那么均衡 C^* 是分离均衡(separating equilibrium)。

我们先证明,仅包括一个合约 $b = (0, \bar{v}) = (0, \alpha_H v_H + \alpha_L v_L)$ 的集合不是均衡。如图 14.2(a)所示,在集合 $\{a, b\}$ 中,合约 a 和灰色阴影区域内任意一个合约一样,对于类型为 H 的工人来说是最优的,但对于类型为 L 的工人来说不是最优的。由于合约 a 中的工资小于 v_H ,如果市场中只有合约 b 时某一个雇主提供合约 a ,那么该雇主所得利润为正,这与定义 14.4 的条件(3)相矛盾。



(a) $\{0, \bar{v}\}$ 不是均衡

(b) 存在均衡时处于均衡(命题 14.1)中的合约

图 14.2 信息不对称的市场中不存在混合均衡

信息不对称的劳动力市场中不存在混合均衡,如果存在均衡,那么这个均衡一定是分离均衡,它包括两个合约,这两个合约分别对两种类型的工人来说是最优的。如图 14.2(b)所示。对类型为 L 的工人来说,最优的合约提供的工资等于其生产能力 v_L ,合约对教育年限不作要求($t=0$)。对类型为 H 的工人来说,最优的合约提供的工资也等于其生产能力 v_H ,但是对教育年限有一定要求,这个要求使得类型为 L 的工人选择这个合约并不会变得更好。

命题 14.1:劳动力市场均衡的特征

如果信息不对称的劳动力市场 $(v_L, v_H, \alpha_L, \alpha_H, \beta_L, \beta_H)$ 中存在均衡 C^* ,那么 $C^* = \{c_L^*, c_H^*\}$,其中, $c_L^* = (0, v_L)$, $c_H^* = (t_H, v_H)$ 且 t_H 满足 $v_H - \beta_L t_H = v_L$ 。在集合 C^* 中,合约 c_L^* 对类型为 L 的工人来说是最优的; c_H^* 对类型为 H 的工人来说是最优的。

证明: 设均衡为 C^* 。

第一步 在集合 C^* 中, ϕ (一个合约也不接受) 对两个类型的工人来说都不是最优选择,因此 C^* 是非空的。

证明: 假设在集合 C^* 中, ϕ 对某种类型 X 的工人来说是最优选择。那么,图 14.3(a) 中灰色阴影区内的所有合约都不属于 C^* (因为如果它们属于 C^* , 那么在集合 C^* 中, 对于类型 X 的工人来说, 灰色阴影区内的合约优于 ϕ)。因此, 在集合

$C^* \cup \{c\}$ 中,任意一个位于图 14.3(a) 灰色阴影区内的合约对类型 X 的工人来说都是最优的。而无论工人的类型是 L 还是 H ,提出合约 c 的雇主的所得收益都为正(所付工资小于 v_L),与条件(3)相违背。 ■

第二步 C^* 不是混合均衡。

证明:假设 C^* 是混合均衡。由第一步可得, C^* 是非空集合,因此在集合 C^* 中,某一合约(假设为 $c^* = (t^*, w^*)$)对两种类型的工人来说是最优的,且由条件(1)可知, C^* 中不包括其他合约。

假设 $w^* > \bar{v} = \alpha_H v_H + \alpha_L v_L$ 。那么 $\pi(c^*, C^*) = \bar{v} - w^* < 0$,这与条件(2)相违背。

假设 $w^* \leq \bar{v}$ 。设图 14.3(b) 中灰色三角形区域中的一个合约 $c' = (t', w')$ 。也就是说, $w^* + \beta_H(t' - t^*) < w' < \min\{w^* + \beta_L(t' - t^*), v_H\}$ 。在集合 $\{c^*, c'\}$ 中,合同 c' 对类型为 H 的工人来说是最优选择,但对类型为 L 的工人(更偏好 c^*)来说不是最优选择。因此有 $\pi(c', \{c^*, c'\}) = v_H - w' > 0$,这与条件(3)相违背。 ■

由第一步、第二步、条件(1)和没有一个工人认为两个合约是无差异的这个事实可得: C^* 仅包括两个合约,令 $C^* = \{c_L, c_H\}$,在集合 C^* 中, $c_L = (t_L, w_L)$ 对类型为 L 的工人来说是最优选择, $c_H = (t_H, w_H)$ 对类型为 H 的工人来说是最优选择。接下来,我们讨论这两个合约的特征。

第三步 对于 $X = H, L, w_X \leq v_X$ 。

证明:对提供合约 c_X 的雇主来说,有 $\pi(c_X, C^*) = v_X - w_X$,由条件(2)可知 $w_X \leq v_X$ 。 ■

第四步 $c_L = c_L^* = (0, v_L)$ 。

证明:根据第三步证明,有 $w_L \leq v_L$ 。如果 $w_L < v_L$,那么在集合 $C^* \cup \{c\}$ 中,合约 $c = (t_L, \frac{1}{2}(v_L + w_L))$ (至少)对类型为 L 的工人来说是最优的,于是, $\pi(c, C^* \cup \{c\}) \geq v_L - \frac{1}{2}(v_L + w_L) = \frac{1}{2}(v_L - w_L) > 0$,这与条件(3)相违背。因此可知 $w_L = v_L$ 。

如果 $t_L > 0$,设 $c' = (t'_L, w'_L)$, $t'_L < t_L$, $w'_L < w_L$, $w'_L - \beta_L t'_L > w_L - \beta_L t_L$ 。也就是说, c' 降低了最低教育年限,提供的工资也更低,但类型为 L 的工人如果选择这个合约收入会有所增加。因此,在集合 $C^* \cup \{c'\}$ 中, c' 至少对类型为 L 的工人来说是最优选择,于是, $\pi(c', C^* \cup \{c'\}) \geq v_L - w'_L > 0$,这与条件(3)相违背。因此, $t_L = 0$ 。 ■

第五步 $w_H = v_H$,且类型为 L 的工人得到的收入都相等,即 $v_H - \beta_L t_H = v_L$ 。

证明:由第三步证明可知 $w_H \leq v_H$ 。因为在集合 C^* 中,合约 c_H 仅对类型为 H 的工人来说是最优选择,合约 c_L 仅对类型为 L 的工人来说是最优选择,所以 c_H 位于图 14.4 中的灰色区域。如果 c_H 不是 c_H^* (即水平线 $w = v_H$ 和 $w - \beta_L t = v_L$ 的交点),那么深灰色区域内的任意一个合约 c'_H 对类型为 H 的工人来说都比 c_H 更

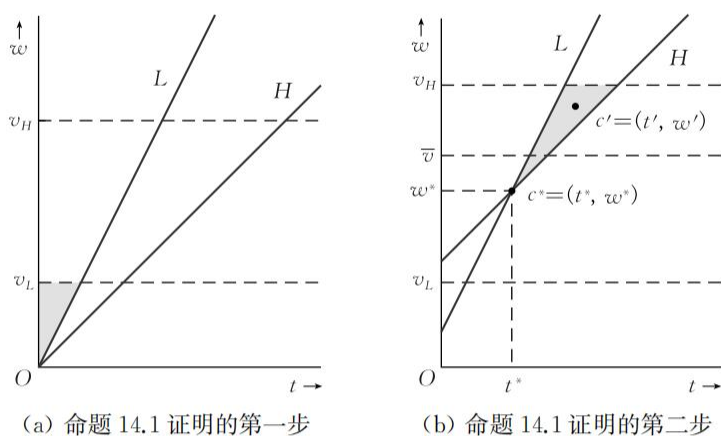


图 14.3 命题 14.1 证明的第一步和第二步

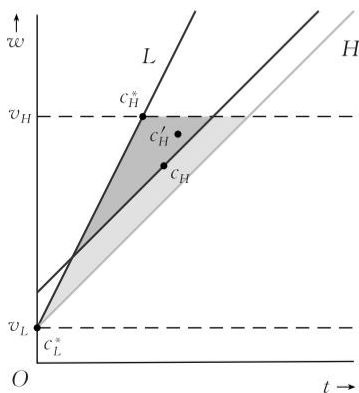


图 14.4 命题 14.1 证明的第五步

好,但对类型为 L 的工人来说比 c_L 更差。因此,在 $\{c_L, c_H, c_H'\}$ 中, c_H' 仅对类型为 H 的工人来说是最优选择,于是, $\pi(c_H', \{c_L, c_H, c_H'\}) > 0$,这与条件(3)相违背。因此, $w_H = v_H$, $v_H - \beta_L t_H = v_L$,于是, $c_H = c_H^*$ 。 ■

这个命题中描述的合约的集合是否是均衡实际上取决于各种类型的工人所占的比例。设 $m = v_H - \beta_H t_H$,那么类型为 H 的工人无论选择合约 $(0, m)$ 还是合约 c_H^* 所得到的收入都相同。

如果类型为 L 的工人所占比例足够大,使得全部工人的平均生产能力 $\bar{v}$ 小于 m [如图 14.5(a)所示],那么根据以下几点可知 C^* 是一个均衡。

- (1) 每个合约 c_X^* 对类型为 X 的工人来说都是最优选择。
- (2) 每个合约 c_X^* 都使得其雇主的收益为 0。
- (3) 在集合 $\{c_L^*, c_H^*, c\}$ 中,如果合约 $c = (t, w)$ 仅对类型为 H 的工人来说是最优的,则该合约位于图 14.5(a)中的灰色阴影区内,由此可得 $w > v_H$,因此该合约给雇主带来的利润不为正。

- (4) 在集合 $\{c_L^*, c_H^*, c\}$ 中, 如果合约 $c=(t, w)$ 对类型为 L 的工人来说是最优的, 则 $w > v_L$ 。因此, 如果 c 仅对类型为 L 的工人来说是最优的, 则该合约给雇主带来的利润小于 0。
- (5) 在集合 $\{c_L^*, c_H^*, c\}$ 中, 如果合约 $c=(t, w)$ 对两种类型的工人来说都是最优的, 那么这个合约必定位于类型为 H 的工人穿过 c_H^* 的那条等收入曲线[即图 14.5(a) 中深灰色线]的上方, 于是, $w > m$ 。由于 $m > \bar{v}$, 因此有 $w > \bar{v}$, 所以提出合约 c 的雇主无法获利。

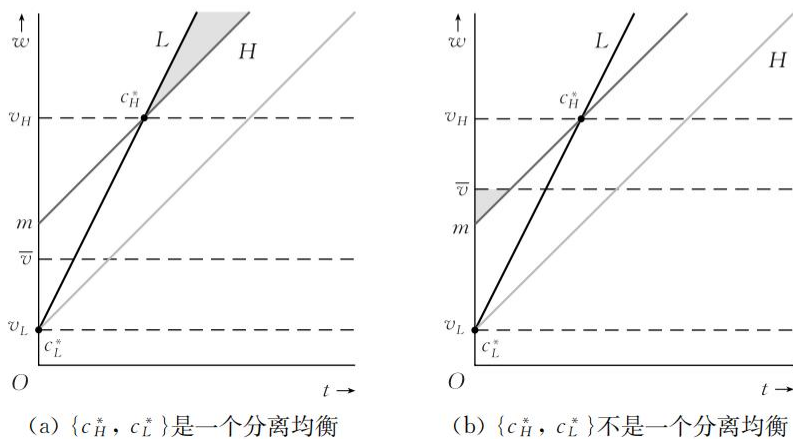


图 14.5 信息不对称的劳动力市场中的均衡

另一方面, 如果类型为 H 的工人所占的比例足够大, 使得全部工人的平均生产能力 $\bar{v}$ 大于 m , 那么, 一个雇主如果提出一个新合约 $(0, m)$ [或图 14.5(b) 中灰色三角形内的任意一个合约] 会吸引两种类型的工人, 且该雇主获得的利润大于 0。所以, 在这种情况下, 合约的集合 C^* 不是一个均衡。

评注

这个模型与生物学中的“不利条件原理”有关。这个原理可以解释某些现象, 比如雄鹿的长角。雄鹿通过其看似无用的角来表现其未被观察到的健康状态(生物价值)。这个信号的有效性依赖于这样一个事实: 消耗资源长出一对无用的长角, 对更健康的雄鹿来说成本更低。在经济学中, 工人通过受教育来显示其未被观察到的生产能力水平, 受教育对于生产能力没有影响, 但是对生产能力水平更高的工人来说受教育的成本更低。

课后习题

1. 质量证明书。市场中有一些生产者, 每个生产者可以生产一个单位的商品。二分之一的(类型为 L 的)生产者所生产的商品的质量较差, 其余二分之一的(类型为 H 的)生产者所生产的商品的质量较好。每个生产者都知道其产品的质

量,且没有生产成本。

市场中也有一些商人,每个商人都可以从生产者手中购买一个单位的商品。商人购买一个单位商品后,如果该商品质量较好则可以按价格 20 卖出,如果该商品质量较差则可以按价格 10 卖出。在买到商品之前,商人们无法确定商品的质量。

生产者可以得到一份质量证明书,以证明其产品是高质量的。对类型为 H 的生产者来说,该质量证明书的成本为 4;对于类型为 L 的生产者来说,该质量证明书的成本为 12(类型为 L 的生产者需要贿赂发放质量证明书的机构。)

商人们向生产者发出报价。报价有两种形式: $(+, p)$ 和 $(-, p)$ 。 $(+, p)$ 承诺支付金额 p 给有质量证明书的商品, $(-, p)$ 承诺支付金额 p 给没有质量证明书的商品。商人都追求利润最大化。

每个生产者需要决定是接受商人提出的其中一个报价,还是一个报价也不接受(这种情况下其利润为 0)。生产者追求利润最大化。如果生产者认为两个报价无差异,那么会选择那个不需要质量证明书的报价。

此时的均衡应该是报价的集合。请按本章的思路给均衡下个定义,且说明所有均衡的特征。

2. 将学生分类。考虑这样的世界:一些企业家为某城市的学生们提供教育服务。所有学生必须选择一所学校(如果有学校存在)。每个学生都喜欢离该城市近的学校。有两种风格的学校: A 和 B 。一所学校就是一对 (x, d) , 其中 x 是学校的风格, d 是学校与该城市之间的距离(学校的定义与本章中合约的定义类似)。如果 d 相同,那么相对于 (B, d) , 学生更偏好 (A, d) 。

有两种类型的学生:

- (1) 类型 1 的学生愿意为了去 A 风格的学校上学而多走 10 千米。也就是说,当且仅当 $d \leq d' + 10$ 时, $(A, d) \geq^1 (B, d')$ 。类型 1 的学生更适合 A 风格的学校。
- (2) 类型 2 的学生愿意为去 A 风格的学校上学而多走 5 千米。也就是说,当且仅当 $d \leq d' + 5$ 时, $(A, d) \geq^2 (B, d')$ 。类型 2 的学生更适合 B 风格的学校。

如果一个学生认为两个学校之间是无差异的,那么他会选择离城市最近的那所学校。

假设只有当选择某所学校的所有学生都是更适合这个风格的学校时,才会建立这所新学校。如果没有学生选择某一个现存的学校,或者所有选择该学校的学生都更适合另一种风格的学校,这所现存的学校就会倒闭。请注意这里的非对称性:对于现存学校来说,只要有学生选择它而且只要其中有一部分学生是更适合这个风格的学校的,它就会继续存在;但如果要建立一所新学校,所有选择这所新学校的学生都应该是更适合这个风格的学校的。

请给均衡下个定义,并说明均衡的特征。

本章说明

本章中的例子以 Spence(1973)为基础,但是对例子的分析参考了 Rothschild 和 Stiglitz(1976)。“不利条件原理”由 Zahavi(1975)提出。

第三部分 博弈论

▶ 15

策略博弈

策略博弈模型是博弈论的核心。在策略博弈中,每个人从给定集合中选择一个行动,并且他不仅受自己的行动的影响,还受其他人行动的影响。在本章,我们将介绍纳什均衡的概念:给定其他人的行动,如果没有人想要改变自己的行动,那么,这些行动组合(action profile)就是稳定的。

15.1 策略博弈和纳什均衡

策略博弈包括一组参与者的集合、每个参与者可采取的行动的集合,以及每个参与者的定义在行动组合(由每个参与者采取的行动组成)上的偏好。在博弈中,每个参与者在所有可采取的行动中选择一个,因此,博弈的结果就是一个行动组合。我们一般用效用函数表示参与者的偏好关系,而不是抽象地讨论偏好,并且称效用函数为收益函数(payoff function)。

定义 15.1: 策略博弈

策略博弈 $\langle N, (A^i)_{i \in N}, (\geq^i)_{i \in N} \rangle$ 包括:

参与者

一个集合 $N = \{1, \dots, n\}$ 。

行动

每个参与者 $i \in N$ 的行动的集合 A^i 。

偏好

每个参与者 $i \in N$ 对行动组合 $A = \times_{i \in N} A^i$ 的偏好关系 $\geq^i$ 。

效用函数 $u^i: A \rightarrow \mathbb{R}$ 用于表示 $\geq^i$, 是参与者 i 的收益函数。

这个模型与本书第二部分的模型主要有两点不同:首先,在策略博弈中每个参与者的选项集合是固定不变的,而在市场模型中个人的选项集合是由均衡决定的;其次,在市场模型中个人的偏好是对自己的选择的偏好,而在策略博弈中参与者的偏好是对所有人的行动组合的偏好,考虑了其他人的行动对该参与者的影响。

我们在本章讨论的博弈的解主要是纳什均衡。纳什均衡是一个行动组合,任

何一个参与者单独改变其行动从而偏离均衡,都不会产生一个让该参与者更偏好的行动组合。也就是说,在纳什均衡中,给定其他人的行动,每一个参与者的当前的行动都是他的最优行动。

定义 15.2: 策略博弈的纳什均衡

在一个策略博弈 $\langle N, (A^i)_{i \in N}, (\geq^i)_{i \in N} \rangle$ 中,如果对于每个参与者 $i \in N$ 来说,对任何 $x^i \in A^i$ 都有:

$$(a^i, a^{-i}) \geq^i (x^i, a^{-i})$$

那么行动组合 $a = (a^i) \in A$ 是一个纳什均衡(Nash equilibrium)。其中, (x^i, a^{-i}) 表示的行动组合仅与 a 有一点不同: 个人 i 的行动是 x^i 而不是 a^i 。

与本书讨论的其他均衡的概念一样,纳什均衡是静态的: 我们不考虑导致每个参与者在纳什均衡中选择某一个行动的动态过程或推理过程。请注意,纳什均衡的概念也排除了当一组参与者一起行动时可能引发的不稳定性。纳什均衡仅仅找出稳定的结果,不会有人想要改变这个结果,并且没有具体说明如何达到这个结果。

我们也可以用最优反应的概念来表示纳什均衡的条件。

定义 15.3: 最优反应

在策略博弈 $\langle N, (A^i)_{i \in N}, (\geq^i)_{i \in N} \rangle$ 中,如果对所有 $x^i \in A^i$ 都有 $(a^i, a^{-i}) \geq^i (x^i, a^{-i})$, 那么,参与者 i 的行动 $a^i \in A^i$ 就是对其他参与者的行动 a^{-i} 的最优反应。

用 $BR(a^{-i})$ 表示参与者 i 对 a^{-i} 的最优反应的集合。那么,当且仅当对于每个参与者 i 来说都有 $a^i \in BR(a^{-i})$ 时,行动组合 a 才是一个纳什均衡。

15.2 几个简单的例子

例 15.1: 旅行者困境

两个人要分别在 180 美元到 300 美元之间选一个金额。之后,每个人都会收到一笔钱,其金额与两人所选的金额中较小的那个相等。此外,如果两人所选的金额不一样,那么选了较大金额的人要给选了较小金额的人转 5 美元(如果两人选的金
额一样,就不必转账)。

“旅行者困境”(traveler's dilemma)这个名字出自一个故事,给枯燥的理论学习增色不少(这也是博弈论的魅力之一)。故事是这样的: 两个旅行者分别带一个行李箱上飞机,两人的行李箱里装的是一件相同的物品,这件物品的价值在 180 美元到 300 美元之间。不幸的是,两个人的行李箱被弄丢了,航空公司要赔偿给旅行者。航空公司要求每个旅行者在 180 到 300 之间选一个整数作为赔偿金。每个旅行者得到的钱等于两人所选的数中较小的那个。如果两人选的数不同,选了较大数的旅行者给选了较小数的旅行者转 5 美元。

这个故事可以用一个博弈模型表示,该策略博弈包括: $N = \{1, 2\}$, $A^i = \{180,$

$181, \dots, 300\}$, 其中 $i=1, 2$, 且

$$u^i(a^1, a^2) = \begin{cases} a^i + 5, & \text{若 } a^i < a^j \\ a^i, & \text{若 } a^i = a^j \\ a^j - 5, & \text{若 } a^i > a^j \end{cases}$$

其中, 参与者 j 是除参与者 i 之外的另一参与者。

命题 旅行者困境中的唯一的一个纳什均衡是 $(180, 180)$ 。

证明: 首先要注意, $(180, 180)$ 的确是一个纳什均衡。因为如果某个参与者选择一个更大的数, 其收益会减少 5 美元。

其次, 其他任意一对 (a^1, a^2) 都不是均衡。不失一般性地, 假设 $a^1 \geq a^2$ 。如果 $a^1 > a^2$, 那么参与者 1 选的数由 a^1 变成 a^2 时, 其收益会从 $(a^2 - 5)$ 提高到 a^2 。如果 $a^1 = a^2 \neq 180$, 那么参与者 i 选择的数变成 $(a^i - 1)$ 时, 其收益会从 a^i 提高到 $(a^i + 4)$ 。 ■

当人们参与这个博弈的时候, 大多数人选的数都不是 180。比如, 来自世界各地的 21 000 个博弈论课程的学生在网页 <http://gametheory.tau.ac.il> 输入自己选的数, 只有 22% 的人选 180。选 300 的人最多 (占比 43%)。约有 8% 的人选了 299, 7% 的人选了 295—298 之中的一个数。给定所有参与者的选择的分布, 选 298 是最优行动。

这个结果与纳什均衡不同。一个可能的解释是, 参与者的偏好与策略博弈中假定的偏好不同。大多数人不仅关心自己最终可以得到的金钱, 还有一些人认为选择 300 对全社会而言都比较理想, 尤其是当他们认为其他大多数人都会选择 300 的时候。大多数人不想以损害其他人的利益为代价多得一些钱, 尤其是当他们认为对方并没有试图钻规则的空子的时候。因此, 举例来说, 虽然选择 $(299, 300)$ 比选择 $(300, 300)$ 得到的钱更多, 但是参与者 1 相对于 $(299, 300)$ 可能会更偏好 $(300, 300)$ 。在这种情况下, 实验结果与纳什均衡之间的差别就减小了, 因为 $(300, 300)$ 在这种经过修正偏好的博弈中本身就是一个均衡。

接下来我们要讨论的几个例子都是双人博弈, 每个参与者只有为数不多的几个选项。这样的博弈可用矩阵表示, 每一行表示参与者 1 的一个行动, 每一列表示参与者 2 的一个行动, 每一个单元格中的两个数是两个参与者的收益, 反映出两人的偏好。举例来说, 在下面这个策略博弈中, 参与者 1 的行动是 T 和 B , 参与者 2 的行动是 L 和 R 。每个单元格对应一个行动组合。比如, 左上角的单元格对应 (T, L) 。参与者 1 对行动组合的偏好由单元格内左边的数表示, 参与者 2 对行动组合的偏好由单元格内右边的数表示。因此, 对参与者 1 来说最差的行动组合是 (B, R) , 对参与者 2 来说最优的行动组合是 (B, L) 。

	L	R
T	5, 0	-1, 1
B	3, 7	-2, 0

例 15.2: 囚徒困境

囚徒困境是最有名的一个策略博弈。囚徒困境背后的故事是：一桩抢劫案的两个嫌疑犯因为一个不太严重的罪行被抓。警察手中仅有对这个不太严重的罪行的证据。如果两人都承认抢劫，则两人都要坐 6 年牢。如果一个人承认抢劫且告发未认罪的另一人，那么认罪的人无罪释放，未认罪的人要坐 7 年牢。如果两人都承认不承认抢劫，那么每个人要坐 1 年牢。每个人都想在接下来的 7 年中多自由几年，或者说少坐几年牢。

这个故事的激励机制跟许多其他情形的激励机制相同。两个人必须在两个行动 C (不认罪) 和 D (认罪) 中选一个，无论其他人选什么，每个人相对于 C 都更偏好 D ，且这两人相对于 (D, D) 更偏好 (C, C) 。

我们可以把这个情形当成一个博弈问题。在这个策略博弈中， $N = \{1, 2\}$ ， $A^i = \{C, D\}$ ，其中 $i = 1, 2$ ，参与者的偏好可由如下收益矩阵表示：

	C	D
C	6, 6	0, 7
D	7, 0	1, 1

无论其他人选择的行动是什么，每个参与者都最好选择行动 D 。因此 (D, D) 是该博弈中唯一一个纳什均衡。

行动组合 (D, D) 不是帕累托稳定的：两个参与者都更偏好 (C, C) 。因此，人们有时会用“囚徒困境”来说明即使所有参与者的行为都是理性的，也可能会得到一个对社会来说不理想的结果。

在建立策略博弈模型来分析这个问题的时候要小心，有些人的偏好可能与我们假设的偏好不一样：当其他人选 C 而自己选 D 时，有些人会很感到愧疚，因此相对于“别人选 C 而自己选 D ”这个行动组合，他们更偏好于选 (C, C) 。根据现实情况对偏好进行适当修改后，这个博弈的纳什均衡是 (C, C) 。

以上两个策略博弈（旅行者困境和囚徒困境）是对称的：每个参与者的行动集合是一样的，且对参与者 1 来说 (a^1, a^2) 的收益与对参与者 2 来说 (a^2, a^1) 的收益相同。

定义 15.4: 对称的双人博弈

如果 $A^1 = A^2$ ，当且仅当 $(a^2, a^1) \geq^2 (b^2, b^1)$ 时有 $(a^1, a^2) \geq^1 (b^1, b^2)$ 时，双人策略博弈 $(\{1, 2\}, (A^i)_{i \in \{1, 2\}}, (\geq^i)_{i \in \{1, 2\}})$ 是对称的。

换句话说，如果 u^1 表示 $\geq^1$ ，那么定义为 $u^2(a^1, a^2) = u^1(a^2, a^1)$ 的函数 u^2 可以用于表示 $\geq^2$ 。在对称博弈中，在描述参与者的偏好时可以用“这个参与者”和“另一个参与者”这样的表达，而不必指明参与者的名字。

例 15.3: 见面地点（巴赫还是斯特拉芬斯基）

两人可以在两个地点之一见面： B （巴赫的音乐会）或 S （斯特拉芬斯基的音乐会）。其中一个人更偏好地点 B 见面，另一个人更偏好地点 S 见面。相对于

不见面,两人都更偏好在 B 或 S 随便哪个地方见面,而且认为自己去了 B 而另一人去了 S 和自己去了 S 而另一人去了 B 这两个结果是无差异的。

这个问题可以用以下策略博弈表示:

	B	S
B	2, 1	0, 0
S	0, 0	1, 2

这个博弈有两个纳什均衡: (B, B) 和 (S, S) 。可以认为第一个均衡 (B, B) 表示参与者 2 向参与者 1 作出让步的惯例,第二个均衡 (S, S) 表示参与者 1 向参与者 2 作出让步的惯例。如果参与博弈的人在各方面存在系统性差异,这个解释就尤为合理。比如,如果参与者 1 比参与者 2 年龄更大,那么 (B, B) 可以理解为年轻的参与者向年老的参与者让步。

请注意,也可用一个对称的博弈来表述这个问题,其中每个人都有两个行动可选: F (偏好的地点)和 N (非偏好的地点),如下所示:

	F	N
F	0, 0	2, 1
N	1, 2	0, 0

虽然这个博弈是与前面那个博弈对称的,但是博弈中的两个纳什均衡 (N, F) 和 (F, N) 不与前面那个博弈对称。

例 15.4: 奇数还是偶数(猜硬币博弈)

在一个双人博弈中,两个参与者都是孩子,每个参与者伸出 1—5 个手指头。如果两人伸出的手指头的数目之和是奇数,那么其中一个参与者(假设为参与者 1)获胜;如果两人伸出的手指头的数目之和是偶数,那么另一个参与者(假设为参与者 2)获胜。每个参与者都不想成为输家。

这个情形可以表示为一个策略博弈,其中,每个参与者都有 5 个行动可选。收益矩阵如下所示:

	1	2	3	4	5
1	0, 1	1, 0	0, 1	1, 0	0, 1
2	1, 0	0, 1	1, 0	0, 1	1, 0
3	0, 1	1, 0	0, 1	1, 0	0, 1
4	1, 0	0, 1	1, 0	0, 1	1, 0
5	0, 1	1, 0	0, 1	1, 0	0, 1

很显然,关键在于参与者选择伸出的手指头的个数是奇数还是偶数。所以这个情形也可以表示为另一个策略博弈,在该博弈中每个参与者的行动是伸出奇数或偶数个手指头。

	奇数	偶数
奇数	0, 1	1, 0
偶数	1, 0	0, 1

与前两个例子不同,例 15.4 中的这两个博弈是严格竞争性的(strictly competitive):当且仅当结果对参与者 2 来说更差时,对参与者 1 来说才更好。这两个博弈都没有纳什均衡。这很容易理解:这个博弈中的参与者实际上在做随机选择,因此无法预期会出现一个确定性的稳定行为模式。在 15.7 节讨论包含随机性的均衡的概念时,我们再回过头来讨论这个博弈。

请注意,如果两人必须选择硬币的一面(正面或是背面),其中参与者 1 不想和参与者 2 选择的一样,而参与者 2 想和参与者 1 选择的一样,那么参与者的收益就与上面那个猜奇数还是偶数的博弈相同。因此,这类博弈也称为猜硬币博弈。

例 15.5:协调博弈

两人可以在体育馆的黄(Y)、绿(G)、蓝(B)三个门口之中选一个见面。他们想要见面,但不在于在哪见面。这个情形可用以下这个策略博弈表示。

	Y	B	G
Y	1, 1	0, 0	0, 0
B	0, 0	1, 1	0, 0
G	0, 0	0, 0	1, 1

两人选择同一个地点的三个行动组合是纳什均衡。如果某种颜色(比如黄色)的体育馆门口是一个显眼的见面地点,那么均衡(黄色,黄色)就是最合理的。

15.3 经济学例子

我们从拍卖的两个例子开始。在密封投标拍卖中, n 个参与者竞标一个不可分割的商品。参与者 i 对该商品的货币估值为 $v^i > 0, i = 1, \dots, n$ 。为简单起见,假设任意两个参与者的估值都不相同,因此在不失一般性的情况下,假设 $v^1 > v^2 > \dots > v^n$ 。每个参与者的出价均为非负数,并且出价最高的参与者会赢得该商品;如果出价最高的参与者有多个,则将商品分给其中上标 i 最小的参与者。也就是说,获胜者 $W(b^1, \dots, b^n)$ 是满足 $b^i \geq b^j$ 的参与者中 i 最小的参与者,其中, $j = 1, \dots, n$ 。我们假设每个参与者只在意自己能否获得该商品以及需要支付多少钱。关于参与者应支付多少钱,我们接下来讨论两个拍卖的规则有所不同。如果参与者 i 得到该商品且支付 p ,则其收益为 $(v^i - p)$;如果参与者没得到该商品且支付 p ,则其收益为 $-p$ 。

例 15.6:第一价格拍卖

第一价格拍卖是一种密封投标拍卖,其中赢得该商品的参与者(出价最高的所

有参与者中 i 最小的那个参与者) 支付其出价, 其他人不必支付, 因此参与者 i 的收益函数为:

$$u^i(b^1, \dots, b^n) = \begin{cases} v^i - b^i, & \text{如果 } W(b^1, \dots, b^n) = i \\ 0 & \text{, 其他} \end{cases}$$

这个博弈有许多纳什均衡, 举例如下:

- (1) $b^1 = v^2$ 且对其他参与者 i 有 $b^i = v^i$ 。参与者 1 的收益为 $(v^1 - v^2)$ 。他没有办法进一步提高其收益: 如果他降低出价, 那么他不再是获胜者, 收益减少至 0。其他参与者只有出价高于 v^2 时才能获得该商品, 但这会使他们的收益为负。
- (2) $b^1 = b^2 = v^2$, 且对其他参与者 i 来说, $b^i = 0$ 。
- (3) 所有参与者 i 出价相同, 都是 $b^i = p$, 其中 $v^2 \leq p \leq v^1$ 。

命题 在第一价格拍卖的所有纳什均衡中, 参与者 1 得到该商品, 且支付的价格位于区间 $[v^2, v^1]$ 内。

证明: 令 $(b^1, \dots, b^n)$ 为一个纳什均衡。设获胜者 $i \neq 1$ 。每个人的出价需要满足 $b^i \leq v^i$ (否则, 参与者 i 的收益为负, 此时, 只要他把出价降为 0 他的收益就可以提高到 0)。因此, 参与者 1 只要在 v^2 到 v^1 之间出价, 就能赢得该商品, 且收益为正。

现在假设参与者 1 最终得到该商品。如前所述, 必有 $b^1 \leq v^1$ 。如果 $b^1 < v^2$, 则参与者 2 可以将其出价提高至 b^1 和 v^2 中的某个数, 就可以赢得该商品且所得收益为正。因此, 参与者 1 的出价要满足: $b^1 \in [v^2, v^1]$ 。■

事实上, 当且仅当 $b^1 \in [v^2, v^1]$ 且其他参与者 i 的出价都满足 $b^i \leq b^1$ 时, $(b^1, \dots, b^n)$ 才是该博弈的一个纳什均衡。

例 15.7: 第二价格拍卖

第二价格拍卖也是一种密封投标拍卖, 赢得该商品的参与者支付其他人出价中的最高值, 且其他参与者不必支付, 参与者 i 的收益函数为:

$$u^i(b^1, \dots, b^n) = \begin{cases} v^i - \max_{j \neq i} \{b^j\}, & \text{如果 } W(b^1, \dots, b^n) = i \\ 0 & \text{, 其他} \end{cases}$$

首先我们从直观上来看该博弈的纳什均衡有何特点, 假设 $n = 2$, $v^1 = 10$, $v^2 = 5$, 该博弈的纳什均衡包括 $(7, 7)$ 、 $(8, 2)$ 、 $(3, 12)$ 、 $(10, 5)$ 。

接下来我们要证明第二价格拍卖中有很多个纳什均衡。

命题 对每个参与者 i 和每个价格 $p \leq v^i$, 第二价格拍卖都有一个纳什均衡: 参与者 i 获得该商品, 且支付 p 。

证明: 考虑这样一个行动组合: 参与者 i 出价 $b^i > v^1$, 另外某个参与者 j 出价 p , 其他参与者都报价 0。此时, 参与者 i 赢了, 且其收益为 $(v^i - p)$ 。如果他改变出价, 其收益要么保持不变, 要么变为 0。其他所有参与者的收益均为 0, 且只要他不提高出价成为赢家就将保持为 0。而一旦他提高其出价成为赢家, 那么他的出

价至少为 $b^i > v^1$, 但这样的话他的收益就为负。 ■

这个结论表明, 这种拍卖有一个均衡: 每个参与者的出价都与其估值相同。这个均衡很吸引人, 因为它有个特殊的性质: 无论其他人出价多少, 参与人 i 出价等于其估值 v^i 的这个行动对他来说至少和其他行动一样好, 即, 对所有 b^{-i} 和 b^i , 都有 $u^i(v^i, b^{-i}) \geq u^i(b^i, b^{-i})$ 。到第 17 章, 我们再回过头来看这个性质 (详见课后习题第 2 题)。尽管这个均衡很吸引人, 但是在实验中大多数实验对象的出价都不会等于其估值 (参见 Kagel and Levin, 1993)。

例 15.8: 位置博弈

一个城镇里的居民沿主街均匀分布, 将主街当成一个区间 $[0, 1]$, 所有的居民均匀分布在这个区间里。两个卖家在这个区间里选择两个位置开店。每个居民从位置离他较近的卖家那里购买一个单位商品。因此, 如果卖家的位置分别为 a^1 和 a^2 , 且 $a^1 < a^2$, 那么所有位置小于 $\frac{1}{2}(a^1 + a^2)$ 的居民在卖家 1 那里购买商品; 所有位置大于 $\frac{1}{2}(a^1 + a^2)$ 的居民在卖家 2 那里购买商品; 恰好位于 $\frac{1}{2}(a^1 + a^2)$ 的居民所占比例为 0, 所以可忽略不计。每个卖家都想要将商品卖给尽可能多的居民。

我们可将这个情形表示为一个策略博弈, 其中 $N = \{1, 2\}$, $A^i = [0, 1]$, 且

$$u^i(a^1, a^2) = \begin{cases} \frac{1}{2}(a^1 + a^2) & , \text{如果 } a^i < a^j \\ \frac{1}{2} & , \text{如果 } a^i = a^j \\ 1 - \frac{1}{2}(a^1 + a^2) & , \text{如果 } a^i > a^j \end{cases}$$

请注意, 这个博弈是严格竞争的。

命题 位置博弈中唯一的纳什均衡是 $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ 。

证明: $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ 是纳什均衡: 如果某个卖家偏离 $\frac{1}{2}$, 来他这里购买商品的居民的数量会减少。

这个博弈中不存在其他的纳什均衡。如果两个卖家选择的位置不一样, 那么任意一个卖家将其位置向另一个卖家所在位置移动, 其市场份额会提高。如果两个卖家选择的位置一样, 但不是 $\frac{1}{2}$, 那么, 任意一个卖家将其位置移向 $\frac{1}{2}$ 处后, 其市场份额都会提高。 ■

请注意, 每个参与者选择位置 $\frac{1}{2}$ 处会确保其收益至少为 $\frac{1}{2}$, 但参与者没办法确保其收益高于 $\frac{1}{2}$ 。某个行动可确保某个参与者可获得某一个收益, 且不存在其他

的行动能确保该参与者获得更高的收益,我们称这种行动为最大化最小值行动(maxmin action)。

评注

如果位置博弈中有三个参与者,则不存在纳什均衡。原因如下。

如果在一个行动组合中三个参与者选择的位置相同,那么,某个参与者向左移动一点,或者向右移动一点,都会使得该参与者的收益大于 $\frac{1}{3}$ 。

当行动组合中三个参与者选择的位置不同时,只有一个参与者选择其位置,其余两个参与者要么在这个位置左边,要么在这个位置右边。选择位置的这个参与者可以移向其他两个参与者,其收益可以提高。

例 15.9: 努力博弈

假设两个参与者共同完成一个项目。每个参与者决定付出多少努力 $A^i = [0, \infty)$ 。付出的努力为 e 的参与者需承担的成本为 e^2 。该项目可以给参与者 i 带来的收益为 $a^i(c + a^j)$, 其中 j 是另一个参与者, c 是一个正的常数。参与者 i 的收益函数为 $u^i(a^i, a^j) = a^i(c + a^j) - (a^i)^2$ 。

通过简单计算,可得每个参与者 i 对另一个参与者的努力 a^j 唯一的最优反应是 $\frac{1}{2}(c + a^j)$; 最优反应函数如图 15.1 所示。将等式 $a^1 = BR^1(a^2) = \frac{1}{2}(c + a^2)$ 和 $a^2 = BR^2(a^1) = \frac{1}{2}(c + a^1)$ 联立, 得到唯一解 $(a^1, a^2) = (c, c)$ (图中两条直线的交点), 它就是该博弈中唯一的一个纳什均衡。

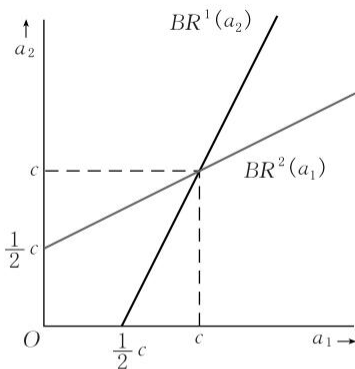


图 15.1 例 15.9 努力博弈中参与者的最优反应函数

注:该博弈有唯一的一个纳什均衡 (c, c) 。

例 15.10: 设定生产数量的寡头(古诺模型)

假设市场中某种商品的两个生产者相互竞争。每个生产者都选择要生产的商品的数量。两人生产的商品总量为 Q , 如果 $Q \leq 1$, 则该商品的市场价格为 $(1 - Q)$, 如果 $Q > 1$, 则该商品的市场价格为 0。每个生产者生产 q 单位商品需承担成本 cq , 其中 $c \in [0, 1)$, 且两个生产者都追求利润最大化。

这个情形可以表示为策略博弈,其中, $N=\{1, 2\}$, $A^i=[0, 1]$, $i=1, 2$:

$$u^i(q^i, q^j) = \begin{cases} (1-q^i-q^j-c)q^i, & \text{如果 } q^i+q^j \leq 1 \\ -cq^i, & \text{如果 } q^i+q^j > 1 \end{cases}$$

其中 j 是另一个参与者。

为找到该博弈的纳什均衡,我们首先确定每个参与者 i 的最优反应函数。如果 $q^j > 1-c$, 则参与者 i 的每一单位产品的价格小于 c , 故参与者 i 的利润为负, 最优产量为 0。如果 $q^j \leq 1-c$, 则参与者 i 的最优产量为 $(1-q^j-c)/2$ 。

最优反应函数如图 15.2 所示。这两个最优反应函数相交于 $(q^1, q^2) = (\frac{1}{3}(1-c), \frac{1}{3}(1-c))$, 这是该博弈唯一的一个纳什均衡。

更一般地说,如果市场中有 n 个生产者,参与者 i 的收益函数为:

$$u^i(q^1, \dots, q^n) = \begin{cases} (1-q^i - \sum_{j \neq i} q^j - c)q^i, & \text{如果 } \sum_{j=1}^n q^j \leq 1 \\ -cq^i, & \text{如果 } \sum_{j=1}^n q^j > 1 \end{cases}$$

因此,参与者 i 的最优反应函数为:

$$BR^i(q^{-i}) = \max\left\{0, \frac{1}{2}(1-c - \sum_{j \neq i} q^j)\right\}$$

在均衡中,对每个参与者 i 有 $2q^i = 1-c - \sum_{j \neq i} q^j$, 可得 $q^i = 1-c - \sum_{i=1}^n q^i$ 。因此,所有参与者 i 的产量 q^i 相同,等于 $(1-c)/(n+1)$ 。均衡价格为 $[1-(1-c)n/(n+1)]$ 。随着 $n \rightarrow \infty$, 价格趋近于 c , 且所有生产者利润趋近于 0。

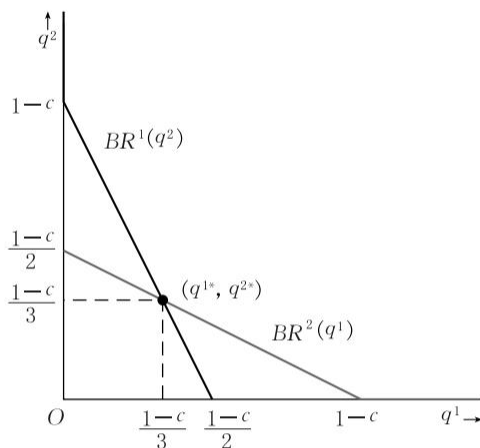


图 15.2 厂商设定产量的双寡头垄断博弈的最优反应函数

注:市场的反需求函数为 $P=1-Q$, 且每个参与者的成本函数为 cq 。唯一的纳什均衡为 $(q^1, q^2) = (\frac{1}{3}(1-c), \frac{1}{3}(1-c))$ 。

例 15.11: 厂商设定价格的双寡头垄断(伯特兰德模型)

与上个例子一样,假设市场中某商品的两个生产者相互竞争。但现在我们假设每个生产者选择一个价格(而不是生产数量)。消费者从商品价格更低的生产者手里购买商品;如果价格相同则消费者平分成两批,分别从两个生产者手里购买商品。具体来说,如果生产者 i 设定的商品价格 p^i 低于生产者 j 设定的商品价格,那么消费者对 i 生产的商品的需求量为 $\max\{0, 1-p^i\}$, 对生产者 j 生产的商品的需求量为 0;如果两个生产者设定的商品的价格相同且等于 p , 那么消费者对每个生产者生产的商品的需求量为 $\frac{1}{2} \max\{0, 1-p\}$ 。每个生产者的单位生产成本为 $c \in [0, 1)$ 。

在这个策略博弈中,对于某一个生产者的某些行为,另一个生产者没有最优反应:如果一个生产者的价格定在 c 和 $\frac{1}{2}$ 之间,则另一个生产者无最优行动(在这种情况下,该生产者所定的价格稍微比另一个生产者的价格低一点是一个比较好的反应,但是由于我们所建的模型中价格是连续变量,所以不存在最优价格)。尽管如此,这个博弈有唯一的一个纳什均衡。

命题 厂商设定价格的双寡头垄断博弈中唯一的纳什均衡为 (c, c) 。

证明: (c, c) 显然是纳什均衡,因为:如果某个生产者提高价格,其利润维持不变,仍为 0;如果某个生产者降低价格,其利润变为负。

现在,我们来证明 (c, c) 是唯一的纳什均衡。假设 (p^1, p^2) 是另一个纳什均衡。

首先,我们有 $\min\{p^1, p^2\} \geq c$ 。因为如果 $\min\{p^1, p^2\} < c$, 则定价为 $\min\{p^1, p^2\}$ 的生产者亏损,而他可以将价格提高,定为 c , 来避免亏损。

其次,一定有 $p^1 = p^2$ 。因为如果 $p^i < p^j$, 那么:(1)如果 $c = p^i$, 则 i 稍微提高一点价格可以提高其收益($c = p^i$ 时收益为 0);(2)如果 $c < p^i < 1$, 则 j 可以将价格降低至 p^i 以提高其收益;(3)如果 $1 \leq p^i$, 则 i 可以将价格降低到小于 1 以提高其收益。

最后,如果 $c < p^1 = p^2 < 1$, 则 i 和 j 的收益都为正,且任何一个生产者都可以稍稍降低自己的定价以获得近乎双倍的收益;如果 $p^1 = p^2 \geq 1$, 则 i 和 j 的收益为 0, 且任何一个生产者都可以将价格定于 c 至 1 之间,以获得正收益。■

15.4 纳什均衡的存在性

如我们之前所讨论的(见例 15.4),某些策略博弈中不存在纳什均衡。本节中,我们仅讨论两种博弈的纳什均衡的存在性。更一般的讨论所需的数学知识超出了本书的范围。

15.4.1 对称博弈

第一个要讨论的是双人对称博弈。在该博弈中,每个参与者的行动集合是有界的闭区间,且其最优反应函数是连续的。

命题 15.1: 对称博弈的纳什均衡的存在性

设 $G = \langle \{1, 2\}, (A^i)_{i \in \{1, 2\}}, (\geq^i)_{i \in \{1, 2\}} \rangle$ 是一个双人对称博弈, 其中 $A^1 = A^2 = I \subset \mathbb{R}$ 是一个有界的闭区间, 每个参与者对另一个参与者的每个行动都有唯一的最优反应, 且该最优反应是另一个参与者行动的连续函数。那么, 存在 $x \in I$ 使得 (x, x) 是双人对称博弈 G 的纳什均衡。

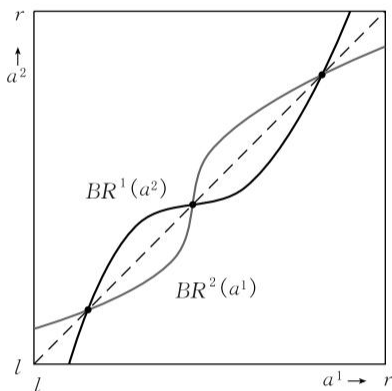
证明: 令 $I = [l, r]$ 。根据假设, 函数 $g(x) = BR^1(x) - x$, 其中 BR^1 是参与者 1 的最优反应函数, 它是一个从 $[l, r]$ 到 $\mathbb{R}$ 的连续函数, 且 $g(l) \geq 0, g(r) \leq 0$ 。因此, 由中值定理可得, 存在一个数 x^* 使得 $g(x^*) = 0$, 或者说使得 $BR^1(x^*) = x^*$ 。由于该博弈是对称的, 有 $BR^2(x^*) = x^*$, 因此, (x^*, x^*) 是一个纳什均衡。

如图 15.3(a) 展示了一个例子。在这个例子中, 每个参与者的最优反应随其他参与者行动的变化而同向变化, 该博弈中存在不止一个均衡。这类博弈中不存在不对称的均衡: 如果 (x, y) 是一个均衡且 $x > y$, 那么 $BR^1(x) = y, BR^2(y) = x$, 因此 $BR^1(y) = x$, 而这与 BR^1 是递增函数相矛盾。

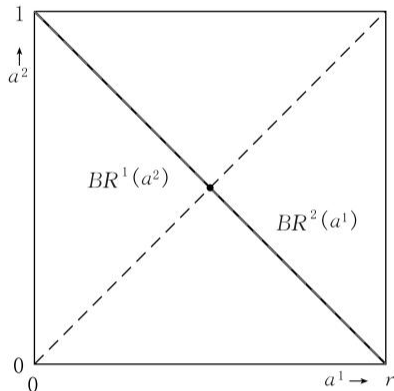
如果每个参与者的最优反应随其他参与者行动的变化而反向变化, 那么除了对称的均衡外, 该博弈还可能会存在不对称的均衡, 如例 15.12 所示。

例 15.12 在一个双人对称博弈中, $N = \{1, 2\}$, 对 $i = 1, 2$ 有 $A^i = [0, 1]$ 且 $u^i(a^1, a^2) = -|1 - a^1 - a^2|$, 参与者 i 的最优反应函数为 $BR^i(a^j) = 1 - a^j$, 它是一个连续函数。 $(x, 1 - x)$ 是一个均衡, 其中 $x \in [0, 1]$; 只有 $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ 是对称的。

如图 15.3(b) 所示, 两个参与者的最优反应函数重合。



(a) 双人对称博弈中参与者的最优反应函数: 三个黑色圆点表示纳什均衡。



(b) 例 15.12 的博弈中参与者的最优反应函数: 每一个 $(x, 1 - x)$ 都是纳什均衡, 黑色圆点表示对称的均衡。

图 15.3 不同博弈中的最优反应函数

15.4.2 超模有限博弈

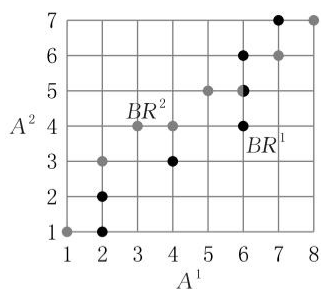
接下来的博弈中,参与者的最优反应函数是非递减的,这类博弈称为超模有限博弈(supermodular finite game)。

命题 15.2: 双人超模有限博弈中均衡的存在性

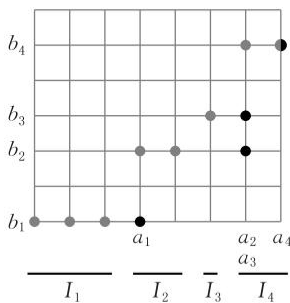
在双人策略博弈 $\langle \{1, 2\}, (A^i)_{i \in \{1, 2\}}, (\geq^i)_{i \in \{1, 2\}} \rangle$ 中, $A^1 = \{1, \dots, K\}$, $A^2 = \{1, \dots, L\}$, 每个参与者的收益各不相同, 因此每个参与者对另一参与者的每个行动都有一个唯一的最优反应。如果两人的最优反应函数都是非递减的, 那么这个博弈有一个纳什均衡。

这个命题假设所有参与者的收益各不相同, 其实仅仅是为了简化分析, 如果除掉这个假设, 该命题同样成立。

图 15.4(a) 所示的最优函数的例子满足命题 15.2 的条件, 其中, $K=8$ 且 $L=7$ 。函数 BR^1 由黑色圆点表示, 函数 BR^2 由灰色圆点表示。由一半黑色一半灰色的圆点表示的一组行动 $(6, 5)$ 是一个纳什均衡。



(a) 满足命题 15.2 条件的博弈中的最优反应函数: 行动组合 $(6, 5)$ 是该博弈的一个纳什均衡。



(b) 命题 15.2 证明的图示。

图 15.4 命题 15.2 的图示

证明: 将集合 A^1 分成若干个区间 $I_1, \dots, I_M$, 使得对在任意一个给定区间 I_m 内的所有行动, 参与者 2 的最优反应是相同的, 等于 b_m (即, 对所有 $x \in I_m$, 有 $BR^2(x) = b_m$), 而且, 如果 $m < m'$, 则 $b_m < b_{m'}$ [见图 15.4(b)]。对于每个 $m = 1, \dots, M$, 令 $BR^1(b_m) = a_m$ 。如果对某个 m 值有 $a_m \in I_m$, 那么 (a_m, b_m) 是一个纳什均衡; 否则, 用 $I_{m(i)}$ 表示 a_i 所属区间。 BR^2 是非递减的, 所以对所有 i 都有 $m(i+1) \geq m(i)$ 。 $m(1) > 1$ (否则, $(1, 1)$ 是一个均衡), 因此有 $m(2) \geq m(1) \geq 2$, 这意味着 $m(2) > 2$ (否则, $(2, 2)$ 是一个均衡)。以此类推, 可得 $m(M) > M$, 这与 $m(M) \leq M$ 相矛盾。

15.5 严格竞争博弈

如果一个策略博弈中有两个参与者,且这两个参与者的利益是完全对立的,那么这个策略博弈是严格竞争的。

定义 15.5:严格竞争博弈

如果对任意一组行动 a 和 b ,当且仅当 $b \geq^2 a$ 时有 $a \geq^1 b$,那么这个双人策略博弈 $\langle \{1, 2\}, (A^i)_{i \in \{1, 2\}}, (\geq^i)_{i \in \{1, 2\}} \rangle$ 是严格竞争的。

我们常称严格竞争博弈为零和博弈。因为如果用函数 u^1 表示 $\geq^1$,那么就可以用定义为 $u^2(a) = -u^1(a)$ 的函数 u^2 表示 $\geq^2$,因此对任意一组行动,两个参与者收益的总和为零。

在经济生活中,人与人之间的利益在大多数情况下既相互交织又相互矛盾,不能表示为严格竞争博弈。严格竞争博弈仅适用于博弈双方的利益是完全对立的情形。举例来说,象棋游戏是严格竞争的(假设每个参与者相对于平局更喜欢赢,相对于输更喜欢平局)。两个政治家之间的拉票竞争也是一个严格竞争博弈。

下面我们来看一个(悲观的)参与者推理过程。“我觉得,无论我采取什么行动,给定我的行动,最终的结果都是在所有可能出现的结果中最糟糕的。所以,我要在这些最糟糕的结果中,选择一个对我来说最优的结果。”如果双人博弈中参与者进行这样的推理,那么参与者 1 选择的行动是以下这个问题的解:

$$\max_{a^1 \in A^1} [\min_{a^2 \in A^2} u^1(a^1, a^2)]$$

参与者 2 选择的行动是以下这个问题的解:

$$\max_{a^2 \in A^2} [\min_{a^1 \in A^1} u^2(a^1, a^2)]$$

举例来说,我们对例 15.3 中“巴赫还是斯特拉芬斯基”博弈稍作修改,得到以下博弈:

	B	S
B	2, 1	0.5, 0.5
S	0, 0	1, 2

这个博弈有两个纳什均衡 (B, B) 和 (S, S) 。假设每个参与者都依据以上我们所描述的悲观推理过程选择行动。如果参与者 1 选择 B ,那么对他来说最差的结果是 (B, S) ;如果参与者 1 选择 S ,那么对他来说最差的结果是 (S, B) 。对参与者 1 来说 (B, S) 优于 (S, B) ,因此他最终会选择 B 。同理可得,参与者 2 会选择 S 。因此,如果两个参与者都根据悲观推理过程来选择其行动,结果为 (B, S) (两个参与者没有遇见)。

接下来,我们回过头来看例 15.8 的位置博弈。这个博弈是严格竞争博弈:只要一个参与者的市场份额增加,另一个参与者的市场份额就会减少。这个博弈有

一个纳什均衡,即两个参与者都选择中点 $\frac{1}{2}$ 。如果参与者选择 $\frac{1}{2}$ 这个位置,其收益至少为 $\frac{1}{2}$ 。如果一个参与者(比如参与者1)选择了除 $\frac{1}{2}$ 之外的其他位置,那么另一个参与者就可以选择某些行动使得参与者1所占市场份额少于 $\frac{1}{2}$ 。举例来说,如果一个参与者选择0.6而另一参与者选择0.55,那么选择0.6的这个参与者所占的市场份额就少于 $\frac{1}{2}$ 。因此,与非严格竞争的“巴赫还是斯特拉芬斯基”博弈不同,位置博弈的纳什均衡和根据悲观推理所得的结果相同。接下来,我们证明对任意一个严格竞争博弈,都有相同结论。

命题 15.3:最大化最小值和纳什均衡

设 $G=\langle\{1, 2\}, (A^i)_{i \in \{1, 2\}}, (\geq^i)_{i \in \{1, 2\}}\rangle$ 是一个严格竞争博弈。(1)如果 (a^1, a^2) 是 G 的纳什均衡,那么对每个参与者 i 来说, a^i 是 $\max_{x^i \in A^i} [\min_{x^j \in A^j} u^i(x^1, x^2)]$ 的解,其中 u^i 表示 $\geq^i$, j 是另一个参与者。(2)如果 G 中存在一个纳什均衡,那么每个参与者的收益在所有均衡中都相同。

证明:假设 (a^1, a^2) 是 G 的纳什均衡。如果参与者2选择除 a^2 之外的其他行动,那么其收益不大于 $u^2(a^1, a^2)$,参与者1的收益不小于 $u^1(a^1, a^2)$ 。因此,如果参与者1选择 a^1 ,则其所得收益最低为 $u^1(a^1, a^2)$:

$$u^1(a^1, a^2) = \min_{x^2 \in A^2} u^1(a^1, x^2)$$

因此,由最大值的定义可得:

$$u^1(a^1, a^2) \leq \max_{x^1 \in A^1} \min_{x^2 \in A^2} u^1(x^1, x^2)$$

由于 (a^1, a^2) 是 G 的纳什均衡,可得对所有 $x^1 \in A^1$,有 $u^1(a^1, a^2) \geq u^1(x^1, a^2)$ 。于是,对所有 $x^1 \in A^1$,有 $u^1(a^1, a^2) \geq \min_{x^2 \in A^2} u^1(x^1, x^2)$,因此有:

$$u^1(a^1, a^2) \geq \max_{x^1 \in A^1} \min_{x^2 \in A^2} u^1(x^1, x^2)$$

最终,我们得到如下结论:

$$u^1(a^1, a^2) = \max_{x^1 \in A^1} \min_{x^2 \in A^2} u^1(x^1, x^2)$$

由此可知,参与者1在所有均衡中的收益都是相同的。同理可证,参与者2在所有均衡中的收益都是相同的。

请注意,这个命题并未要求严格竞争博弈中一定存在纳什均衡。实际上,例15.4中的“奇数还是偶数”博弈是严格竞争博弈,但不存在纳什均衡。

15.6 康德均衡

纳什均衡是策略博弈中最常见的解的概念,但并不是唯一一个解的概念。我

们下面简单讨论一下康德均衡(Kantian equilibrium)的概念。

在纳什均衡中,在其他参与者不改变其行动的情况下,没有任何一个参与者想要改变其行动。在康德均衡中,没有一个参与者想要改变其行动,因为其假设是如果自己改变其行动,那么其他参与者也会以相同的方式改变其行动。为了说清楚康德均衡的概念,我们需要说明“以相同方式”的含义。

我们举个简单的例子来说明这个概念。考虑这样的情况:双人博弈中每个参与者 i 的行动集合都是 $(0, 1]$,且其偏好可用 u^i 表示。假设一个参与者改变其行动,增加或减少了某一比例,且该参与者认为其他参与者也会按同一比例增加或减少其行动。均衡时在假设其他参与者也会以相同方式改变其行动的情况下,没有一个参与者想要改变自己的行动。正式的表达式为:如果对 $i=1, 2$ 和所有 $\lambda>0$ 都有 $u^i(a^1, a^2) \geq u^i(\lambda a^1, \lambda a^2)$,则 (a^1, a^2) 是一个康德均衡。

下面我们计算例 15.10 中的厂商设定产量的双寡头模型中的康德均衡,其中 $c=0$ 。如果 (a^1, a^2) 是这个博弈的康德均衡,需满足:

$$u^1(a^1, a^2) = a^1(1 - a^1 - a^2) \geq \max_{\lambda > 0} \lambda a^1(1 - \lambda a^1 - \lambda a^2)$$

同理,对参与者 2 来说也需满足类似条件。此最大值问题的解为 $\lambda^* = 1/(2(a^1 + a^2))$ 。为得到均衡,需要 $\lambda^* = 1$ 成立,因此有 $a^1 + a^2 = \frac{1}{2}$ 。对参与者 2 来说条件相同,因此, (a^1, a^2) 是一个康德均衡,其中 $a^1 + a^2 = \frac{1}{2}$ 。

不同的是,这个博弈有唯一的纳什均衡—— $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ 。因此,康德均衡中的总产量少于纳什均衡中的总产量。 $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ 不是纳什均衡,因为如果某个参与者不增加产量,另一个参与者增加产量就是有利可图的。但是, $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ 是康德均衡,因为如果一个参与者增加其产出而另一个参与者也增加同样的产出,则该参与者增加产出是无利可图的。

15.7 混合策略

再来看看猜硬币博弈,如下所示:

	H	T
H	0, 1	1, 0
T	1, 0	0, 1

正如我们之前讨论的,这个博弈中不存在纳什均衡。

想象一下,有两组人参与博弈,一组人作为参与者 1,另一组人作为参与者 2。

分别随机从两组人中抽取一人,博弈在这两人之间进行。这两组的每个人每次参与博弈时选择的行动都相同,但是同一组的不同人选择的行动可能是不同的。两人配对进行博弈时都不知道对方的身份。我们对稳定状态(steady state)感兴趣,在这个状态下,每个人对另一组人的行动的分布有正确的判断(也许是因为长期参与博弈积累了足够的经验),且每个人根据对另一组人行动的分布的判断来选择对他来说最优的行动。

该博弈不存在纳什均衡的一个推论是:任何一种组内所有人都选择相同行动的配置都是不稳定的。例如,若第1组中的每个人都选择 T ,而第2组中的每个人都选择 H ,这种配置无法构成一个稳定的稳态,因为第2组中的每个人在确信自己面对的对手必定选择 T 的情况下,选择 T 会带来更高的收益。

接下来,我们讨论每一组中有人选择 H 而有的人选择 T 的这种情形。在第1组中,选择 H 的个人的占比为 p^1 。那么,第2组的人如果选择 H ,则得到收益1的可能性为 p^1 ;如果选择 T ,则得到收益1的可能性为 $(1-p^1)$ 。于是,如果 $p^1 > \frac{1}{2}$,则第2组的每个人相对于 T 更偏好 H ,此时,对第1组的人来说, H 不是最优选择。因此,如果 $p^1 > \frac{1}{2}$,这个博弈没有稳定状态。同理可证,如果 $p^1 < \frac{1}{2}$,这个博弈也没有稳定的状态。

如果 $p^1 = \frac{1}{2}$,情况又会如何? 如果 $p^1 = \frac{1}{2}$,第2组的每个人认为 H 和 T 是无差异的:无论选择 H 还是 T ,都有 $\frac{1}{2}$ 的可能性得到收益1。因此,第2组的人所选择行动的任何一种分布,都不会与其每个人采取最优行动相矛盾。特别地,第2组中一半人选择 H ,一半人选择 T ,这一分布也是合理的。而且,给定这个分布,同理可知第1组的每个人认为 H 和 T 是无差异的。因此,特别地,若第1组中有一半人选择 H ,另一半选择 T ,则这一分布也不会与群体1中每个人在给定第2组行动分布的情况下采取最优行动相矛盾。总之,当且仅当每组中各有一半的人选择每种行动时,每个人的选择才是最优的。

本章剩余部分中,我们把第 i 组称为参与者 i ,把某一组的行动的分布称为混合策略(mixed strategy)。“混合策略”这个术语与均衡的另一种理解有关:在均衡中,参与者选择的是其行动的概率分布。但接下来我们的讨论不涉及这种含义。

定义 15.6:混合策略

给定一个策略博弈 $\langle N, (A^i)_{i \in N}, (\geq^i)_{i \in N} \rangle$,参与者 i 的混合策略是 A^i 的概率分布。只选择采取某一个行动的混合策略 α^i (也就是说,对某些 $a^i \in A^i$,有 $\alpha^i(a^i) = 1$)是一个纯策略(pure strategy)。

如果 A^i 包括有限(或可数)个行动,参与者 i 的混合策略 α^i 给每个行动 $a^i \in A^i$ 分配一个非负数 $\alpha^i(a^i)$,且所有 $\alpha^i(a^i)$ 的总和为1。 $\alpha^i(a^i)$ 的意思是第 i 组中选择 a^i 的个人所占的比例。

如果某些参与者的混合策略不是纯策略,则参与者面临不确定性。为分析其选择,我们需要知道他们对行动组合“彩票”的偏好,而不仅仅是他们对行动组合本身的偏好。按惯例我们采用期望效用(详见 3.3 节)来分析,假设参与者 i 对行动组合“彩票”的偏好可用函数 u^i 的期望值表示, u^i 给每个行动组合赋值。因此,在本章剩余部分(以及混合策略的课后习题中),我们用伯努利函数 u^i 表示策略博弈中每个参与者 i 的偏好,其中 u^i 的期望值表示参与者 i 对行动组合“彩票”的偏好程度,而不是对行动组合的偏好程度。

下面我们将按纳什均衡定义的思路来定义混合策略的均衡的概念,用混合策略而不是行动来描述每个参与者的行为。这个定义仅适用于每个参与者的行动的数量是有限或无限但可数的情况下的博弈。

定义 15.7: 策略博弈的混合策略均衡

设 $G = \langle N, (A^i)_{i \in N}, (u^i)_{i \in N} \rangle$ 是一个策略博弈,参与者 i 的行动的集合 A^i 是有限的或无限但可数的。如果对每个参与者 $i \in N$ 和每个满足 $\alpha^i(a^i) > 0$ 的行动 $a^i \in A^i$,在给定 α^{-i} 时参与者 i 选择 a^i (根据 u^i) 所得的预期收益,至少和在给定 α^{-i} 时参与者 i 选择 x^i 所得的预期收益一样高 ($x \in A^i$),那么,混合策略的组合 $(\alpha^i)_{i \in N}$ 是 G 的混合策略均衡。

混合策略均衡的定义从以下几个方面拓展了纳什均衡的定义:(1)任意一个纳什均衡都是参与者的混合策略为纯策略时的混合策略均衡;(2)如果 α 是混合策略均衡,其中每个参与者的混合策略都是纯策略,也就是说,对每个参与者 i 都有 $\alpha^i(a^i) = 1$,那么, $(\alpha^i)_{i \in N}$ 是纳什均衡。虽然不是所有策略博弈中都存在纳什均衡,但是只要该策略博弈中每个参与者的行动集合是有限的,就一定存在混合策略均衡。这个结论的证明超出本书的范围。

例 15.13: 猜硬币博弈中的混合策略均衡

	H	T
H	0, 1	1, 0
T	1, 0	0, 1

设 (α^1, α^2) 是一对混合策略, $p^1 = \alpha^1(H)$, $p^2 = \alpha^2(H)$ 。如果对任意一个参与者 i ,某一个行动 a^i 满足 $\alpha^i(a^i) = 1$,则 (α^1, α^2) 不是混合策略均衡。举例来说,如果 $p^1 = 1$,则参与者 2 唯一最优的行动为 H ;如果 $p^2 = 1$,则选择行动 H 对参与者 1 来说不是最优的。

当 $p^1 \in (0, 1)$ 时,如果 (α^1, α^2) 是一个均衡,则参与者 1 选择的两个行动必须带来相同的预期收益,所以有 $1 - p^2 = p^2$,因此, $p^2 = \frac{1}{2}$ 。同理,对参与者 2 做相同的分析,可得 $p^1 = \frac{1}{2}$ 。因此,这个博弈中唯一的混合策略均衡是一对混合策略:每组中各有一半人选择每种行动。

例 15.14 表明,一个有纳什均衡的博弈也可能有非纯策略的混合策略均衡。

例 15.14:“巴赫还是斯特拉芬斯基”博弈的混合策略均衡

	B	S
B	2, 1	0, 0
S	0, 0	1, 2

这个博弈有两个纳什均衡 (B, B) 和 (S, S) ,有两个对应的混合策略均衡:在一个混合策略均衡中,两个参与者选择 B 的可能性均为 $\frac{1}{3}$;在另一个混合策略均衡中,两个参与者选择 S 的可能性均为 $\frac{1}{3}$ 。

现在,我们讨论非纯策略的混合策略均衡 (α^1, α^2) 。如果一个参与者的混合策略是纯策略,则另一个参与者的最优策略也是纯策略,所以,在任意一个非纯策略的混合策略均衡中,两个参与者选择两种行动的可能性都大于 0 。

如果两种行动对参与者 1 来说都是最优的,那么,给定参与者 2 的混合策略,这两种行动的预期收益需相等。因此,需 $2\alpha^2(B) = \alpha^2(S)$ 成立,可得 $\alpha^2(B) = \frac{1}{3}$, $\alpha^2(S) = \frac{2}{3}$ 。同理可得: $\alpha^1(B) = \frac{2}{3}$, $\alpha^1(S) = \frac{1}{3}$ 。

因此,这个博弈有三个混合策略均衡,两个是纯策略均衡,一个是非纯策略均衡。在非纯策略均衡中,两个参与者相遇的可能性是 $\frac{4}{9}$,每个参与者得到的预期收益为 $\frac{2}{3}$,比其从纯策略均衡中所得的最低收益还小。

我们也可以这样理解非纯策略均衡:在每一组中,三分之二的人根据其想要的结果选择对应的行动,三分之一的人选择妥协。

在本章最后,我们举一个经济学的例子。

例 15.15:消耗战

两个参与者争夺一个不可分割的物品,对每个参与者来说这个物品的价值均为 1 。时间是离散的,从第 0 阶段开始。在每个阶段,每个参与者要么放弃争夺,要么继续争夺。如果某个参与者放弃争夺,这个博弈结束,由另一个参与者获得该物品。如果两个参与者在同一阶段都放弃争夺,则无人获得该物品。参与者放弃争夺之前,每一阶段都要承担成本 $c \in (0, 1)$ 。如果参与者 1 打算在第 t 阶段放弃,参与者 2 打算在第 s 阶段放弃,且 $s > t$,则参与者 2 在第 $(t+1)$ 阶段获得该物品且付出的总成本为 $(t+1)c$,参与者 1 付出的总成本为 tc 。

我们将这个情形表示为一个策略博弈,其中每个参与者的行动表示其打算在哪一个阶段放弃。此时, $N = \{1, 2\}$,对 $i = 1, 2$ 有 $A^i = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$,并且

$$u^i(t^i, t^j) = \begin{cases} -t^i c & , \text{如果 } t^i \leq t^j \\ 1 - (t^j + 1)c & , \text{如果 } t^i > t^j \end{cases}$$

首先讨论纯策略纳什均衡。对任意一组行动 (t^1, t^2) 来说, $t^1 > 0$, $t^2 > 0$,先放

弃的参与者(或者,当 $t^1=t^2$ 时的任意一个参与者)可以在一开始就放弃争夺以提高其收益。因此,纯策略纳什均衡的形式为 $(0, t^2)$ 或 $(t^1, 0)$ 。在任意一个均衡中,如果 t^i 足够大,以至于 $c(t^i+1) \geq 1$,那么参与者 j 在一开始就会放弃争夺,所得收益为 0,这至少和参与者 j 等到第 (t^i+1) 阶段再放弃时所得的收益 $[1-c(t^i+1)]$ 一样高。

设 (α, α) 是对称的混合策略均衡。(非对称的混合策略均衡留给大家自行证明。)

第一步 α 给每一个阶段赋一个正的概率,各阶段组成的集合不存在可去间断点(hole):不存在 t_1 和 t_2 , 满足 $t_1 < t_2$, 且 $\alpha(t_1)=0, \alpha(t_2)>0$ 。

证明: 假设 $\alpha(t_1)=0, \alpha(t_2)>0$ 。那么存在某个阶段 t 使得 $\alpha(t)=0, \alpha(t+1)>0$ 。下面,我们证明第 $(t+1)$ 阶段的行动不是对 α 的最优反应。如果另一个参与者打算在第 t 阶段之前放弃,则该参与者选择在第 t 阶段和第 $(t+1)$ 阶段放弃的所得收益相等。如果另一个参与者打算在第 $(t+1)$ 阶段或者更晚放弃(这是有可能发生的,因为 $\alpha(t+1)>0$),那么,该参与者选择在第 t 阶段而不是第 $(t+1)$ 阶段放弃就可以节省成本 c 。 ■

第二步 对所有 t 值都有 $\alpha(t)>0$ 。

证明: 假设与之相反, T 是最后一个满足 $\alpha(T)>0$ 的阶段。那么, T 不是对 α 的最优反应,因为选择第 $(T+1)$ 阶段放弃可以得到更高的收益。除非另一个参与者选择在第 T 阶段放弃——这个事件发生的概率为正,即 $\alpha(T)>0$ ——该参与者选择在第 T 阶段和选择第 $(T+1)$ 阶段所得的收益相同。因此,选择在第 $(T+1)$ 阶段放弃所得的预期收益比选择在第 T 阶段放弃所得的预期收益高出 $\alpha(T)(1-c)$, 根据假设 $c<1$, 得到 $\alpha(T)(1-c)>0$ 。因此, T 不可能是最后一个满足 $\alpha(T)>0$ 的阶段。 ■

第三步 对于每个 t 值都有 $\alpha(t)=c(1-c)^t$ 。

证明: 由前两步可得,如果某一个参与者选择 T ,那么无论另一个参与者选择 T 还是 $(T+1)$,这个参与者所得的预期收益都是相同的。如果参与者 j 选择在第 t_j 阶段放弃,那么参与者 i 选择在第 T 阶段或是第 $(T+1)$ 阶段放弃所得的收益如下所示:

	$t_i=T$	$t_i=T+1$
$t_j<T$	$1-(t_j+1)c$	$1-(t_j+1)c$
$t_j=T$	$-Tc$	$1-(T+1)c$
$t_j>T$	$-Tc$	$-(T+1)c$

给定参与者 j 的混合策略,参与者 i 选择在第 T 阶段或是第 $(T+1)$ 阶段放弃所得的预期收益必须相等,因此有:

$$\alpha(T)(1-(T+1)c-(-Tc)) + (1-\sum_{t=0}^T \alpha(t))(- (T+1)c - (-Tc)) = 0$$

或者,

$$\alpha(T) - c\left(1 - \sum_{t=0}^{T-1} \alpha(t)\right) = 0$$

由于 $\alpha(0)=c$, $\alpha(1)=c(1-c)$, 对所有 T 值都有:

$$\begin{aligned}\alpha(T) &= c[1 - (c + c(1-c) + c(1-c)^2 + \dots + c(1-c)^{T-1})] \\ &= c\left[1 - c \frac{1 - (1-c)^T}{c}\right] \\ &= c(1-c)^T\end{aligned}$$

15.8 理解纳什均衡

对纳什均衡的定义有几种解释。本书中我们将均衡定义为一个稳定的行为规则(norm of behavior)或惯例(convention)。纳什均衡是一个行为组合,它为所有人所知,且是稳定的,即给定其他参与者的行为,没有任意一个参与者会认为其选择的行动对他来说不是最优的。举例来说,例 15.5 的协调博弈中的均衡(Y, Y)表示参与者在 Y 相遇的惯例;例 15.3 在“巴赫还是斯特拉芬斯基”博弈中,均衡(F, N)表示行为规则:参与者 1(可能是更年轻的参与者)总坚持在他最喜欢的音乐会上见面,而参与者 2(可能是更年长的参与者)选择妥协;例 15.4 猜硬币博弈中则没有稳定的行为规则。

在另一种相关解释中,我们设想了两组人,每个参与者分别来自其中的某一组。无论何时博弈,从第 i 组中随机抽取一个人作为参与者 i 。每个人基于对其他参与者行动的预期做出决策。在均衡中,这些预期是正确的,且给定每组参与者对另一组参与者行为的预期,该组中每个参与者的行为都是最优的。

如 15.7 节所述,这种解释适用于混合策略均衡。在这种情况下,每组中不同的参与者的行为可能会有所不同。所有参与者都是匿名的,因此,没有人拥有某一特定参与者选择的行动的相关信息。但是,每个参与者对另一组的参与者行为分布的预期是正确的。纳什均衡是一种稳定状态,在这个状态下,每个人对每组中参与者选择的行动的预期是正确的,而且,给定另一组人在均衡时的行动的分布,概率为正的任意一个行动对他来说都是最优的。因此,举例来说,猜硬币博弈中的混合策略均衡表示一种稳定状态,其中每组中各有一半的人分别选择这两种行动。

在某些博弈中,纳什均衡可以视为每个参与者的推理过程的结果或一个演化过程的结果。在本书中,我们不讨论这些观点。

课后习题

博弈的例子

1. 蜈蚣博弈。参与者 1 和参与者 2 轮流决定是停止博弈还是继续博弈。参与者 1

先决定。每个参与者的账户中最初都有 0 元。如果某个参与者决定继续博弈, 则该参与者账户减少 1 元, 而另一参与者的账户增加 2 元。在决定 100 次继续博弈后, 该博弈停止。因此, 每个参与者至多有 50 次机会来停止博弈。每个参与者都希望博弈结束时, 其账户里的金额越大越好。

将这个情形表示为一个策略博弈, 并证明这个博弈中只有唯一一个纳什均衡。

2. 需求博弈。有十个不可分割且相同、合意的物品在两个参与者之间进行分配。试确定以下两个博弈的纳什均衡。

- (1) 两个参与者同时提交其需求量, 即 $\{0, 1, \dots, 10\}$ 中的一个数字。如果需求总和小于等于 10, 则每个参与者获得其所需的数量。否则, 这两个参与者一个都得不到。

- (2) 与(1)中的博弈只有一点不同: 如果需求总和大于 10, 那么: (i) 如果二人的需求量不同, 则需求更少的参与者得到其所需的数量, 而另一参与者得到剩下的物品; (ii) 如果需求相同, 则每个参与者分别得到 5 个物品。

3. 消耗战。两个人(参与者 1 和参与者 2)争夺某一个物品。参与者 i 对这个物品的估值为 v^i , 其中, $i=1, 2$ 。时间是连续变量, 从 0 到正无穷。如果一个参与者放弃争夺, 则另一个参与者获得该物品。如果两个参与者同时放弃争夺, 则两人平分这个物品(对参与者 i 来说, 半个物品的价值等于 $\frac{1}{2}v^i$)。如果两人都不放弃争夺, 则每单位时间两人各损失 1 单位收益。

请将这个情形表示为一个策略博弈, 并证明在纳什均衡中, 这个博弈开始即结束。这个博弈中不存在 $t^1=t^2$ 的均衡: 因为参与者 i 如果选择 $(t^i+\epsilon)$ (ϵ 很小且 $\epsilon>0$) 而不是 t^i , 其收益会提高(因为他会得到整个物品, 而不是只有一半), 且其等待成本仅增加 ϵ 。

这个博弈中不存在 $0<t^i<t^j$ 的均衡, 因为如果参与者 i 选择 0, 其收益相对更高。

当且仅当 $t^2\geq v^1$ 时, $(0, t^2)$ 是一个均衡(如果 $t^2<v^1$, 参与者 1 的最优选择位于 t^2 到 v^1 之间)。同理, 当且仅当 $t^1\geq v^2$ 时, $(t^1, 0)$ 是一个均衡。

在这些均衡中, 一个参与者在一开始就放弃争夺, 而另一参与者打算等待的时间足够长, 以至于其对手选择比他更长的等待时间是不值得的。

4. 扩展的囚徒困境。一栋楼中有 n 个租户, 他们要决定是否保持其房屋整洁, 即 C (保持房屋整洁) 或 D (不保持房屋整洁)。假设每个参与者的偏好可用收益函数表示, 如果参与者选择保持其房屋整洁, 则损失 $B>0$; 如果其他人选择 D , 则损失 $L>0$ 。请将这个情形表示为一个策略博弈, 并对于任意一组参数 $n\geq 2$ 、 B 和 L , 找出这个博弈的纳什均衡。
5. 猜测平均数的三分之二是多少。有 n 个参与者, 每个参与者在 $\{1, \dots, 100\}$ 中选择一个整数。对所有参与者所选的整数取平均数, 如果一个参与者所选整数是最接近这个平均数的三分之二的整数(或者是两个同样最接近这个平均数的

三分之二的整数之一), 则该参与者获得奖励。请注意, 可能没人获得奖励, 也可能几个人同时获得奖励。

将这个情形表示为一个策略博弈, 并找出这个博弈的纳什均衡。

6. 低成本沟通博弈。两个参与者将进行“巴赫还是斯特拉芬斯基”博弈(BoS, 详见例 15.3)。在博弈之前, 参与者 1 给参与者 2 发送一条消息: “我将选择 B”或“我将选择 S”。请构建一个策略博弈, 参与者 1 的行动包括要发送的信息和在“巴赫还是斯特拉芬斯基”博弈中选择的行动(总共有 4 种可能); 参与者 2 的行动是在“巴赫还是斯特拉芬斯基”博弈中给定参与者 1 所发的信息而选择的行动(总共有 4 种可能)。假设两个参与者仅关注在“巴赫还是斯特拉芬斯基”博弈中所得的收益(不关注信息的内容)。请找出这个博弈的纳什均衡。

经济学博弈

7. 战争。两个参与者 1 和 2 争夺一个不可分割的物品, 该物品对于这两个参与者的价值为 $V > 0$ 。每个参与者都对自己投资以变得更强; 非负数 e^i 表示参与者 i 的投资额。给定二人的投资额 (e^1, e^2) , 参与者 i 获得该物品的概率为 $p^i(e^1, e^2)$, 如果 $e^1 + e^2 > 0$, 则 $p^i(e^1, e^2) = e^i / (e^i + e^j)$; 如果 $e^1 = e^2 = 0$, 则 $p^i(e^1, e^2) = \frac{1}{2}$ 。每个参与者 i 的偏好可用效用函数 $[p^i(e^1, e^2)V - e^i]$ 表示。

请将这个情形表示为一个策略博弈, 并证明在所有纳什均衡中两个参与者选择的投资额相等, 并找出这个投资水平的特征。

8. 全支付拍卖。全支付拍卖是一种密封投标拍卖, 每个投标者(而不仅是赢得拍卖的人)都支付其标价。假设有两个参与者。如果两个参与者的投标价相等, 则每个参与者获得该物品一半的价值。

请将这个情形表示为一个策略博弈, 并证明这个博弈中不存在纳什均衡。

9. 位置博弈的另一版本。在位置博弈的一个新版本中, 两个参与者是某一职位的竞选者, 他们的立场的集合为 $[0, 1]$ 。所有选民都有各自最偏好的立场, 在 $[0, 1]$ 区间上均匀分布; 每个选民都支持立场与自己最偏好的立场最接近的候选人。(选民最偏好的立场与两个候选人的立场距离相等的选民的占比为零, 故可以忽略不计。)候选人只在乎自己是否比另一个候选人获得更多、相等或更少的选票。请将这个情形表示为一个策略博弈, 并证明这个博弈有唯一一个纳什均衡。

10. 纳什需求博弈。两个参与者就一单位可分割的商品进行谈判。每个参与者提交一个需求, 即 $[0, 1]$ 之间的一个数值。在需求为 (t^1, t^2) 时, 两人达成协议的概率为 $g(t^1 + t^2) \in [0, 1]$, 其中, g 是可微、非递增函数, 如果两人需求总和小于 1, 则 g 大于 0; 如果两人需求总和大于 1, 则 g 等于 0。如果需求为 (t^1, t^2) 时, 两人达成协议, 则参与者 i ($i = 1, 2$) 得到 t^i 且效用为 $\alpha^i t^i$, 其中, $\alpha^i > 0$ 。每个参与者追求其预期效用最大化。

- (1) 请将这个情形表示为一个策略博弈, 并证明在任意一个纳什均衡中两个参与者提交的需求相同。

(2) 对于任意一个 $\epsilon > 0$, 令 G_ϵ 为一个博弈: 如果 $t^1 + t^2 \leq 1 - \epsilon$, 则 $g_\epsilon(t^1 + t^2) = 1$ 。

当 $\epsilon \rightarrow 0$ 时, G_ϵ 的纳什均衡的极限是什么?

11. 贡献博弈。假设两个参与者共同完成一个项目。参与者 i 的收益函数为 $v^i(c^1 + c^2) - c^i$, 其中 c^i 是参与者 i 对这个项目的贡献, v^i 是递增的、可微的凹函数, 且 $v^i(0) = 0$ 。假设对任意一个参与者 i 都存在一个数值 $x^i > 0$, 满足 $(v^i)'(x^i) = 1$ [因而 $(v^i)'(0) > 1$, 所以, 对一个参与者来说, 如果另一参与者对这个项目不做出贡献, 他的最优选择是做一些贡献]。最后, 假设参与者 2 比参与者 1 对这个项目更感兴趣, 即对所有 x 都有 $(v^2)'(x) > (v^1)'(x)$ 。

请将这个情形表示为一个策略博弈, 并证明在任意一个纳什均衡中只有参与者 2 的贡献是正的。

其他问题

12. 康德均衡。请找出例 15.1 中厂商设定价格的双寡头垄断博弈 (不存在生产成本) 的康德均衡 (见 15.6 节)。
13. 比较静态。两个博弈 G_1 和 G_2 仅有一点不同: 参与者 1 在 G_1 中的某一个收益比其在 G_2 中的收益更高。

(1) 请证明: 如果这两个博弈是严格竞争的, 那么, 对于 G_1 和 G_2 的任意一个纳什均衡来说, 参与者 1 在 G_1 均衡中的收益至少和在 G_2 均衡中的收益一样高。

(2) 如果这两个博弈是非严格竞争的, 那么, 上一问中的结论不成立。请举例证明。

混合策略均衡

14. 混合策略均衡。试确定以下博弈的混合策略均衡。

	L	M	R
T	2, 2	0, 3	2, 2
B	3, 0	1, 1	2, 2

15. 鹰鸽博弈。假设有一群人, 他们经常两两组成一对, 每对的两个人相互争夺一个价值为 1 的物品。每个人要么选择鹰策略 (H) 要么选择鸽策略 (D)。如果一个人选择 H 而另一个人选择 D , 则选择 H 的人得到该物品; 如果两人都选择 D , 则两人平分该物品; 如果两人都选择 H , 则都得不到该物品, 且各需承担损失 $c > 0$ 。这个情形可以表示为以下策略博弈:

	H	D
H	$-c, -c$	1, 0
D	0, 1	0.5, 0.5

请找出这个博弈的对称混合策略均衡, 并证明均衡时的收益随 c 的增加而增加。

16. 进攻和防守。部队 1 有一颗导弹, 可用来进攻部队 2 的三个目标之一。这三个目标的价值可以表示为 $v(1) > v(2) > v(3) > 0$ 。只有当目标没有被反导炮弹保护时, 导弹才能击中该目标。部队 2 有一颗反导炮弹。部队 1 需决定攻击哪个目标, 部队 2 则需决定保护哪个目标。如果目标 t 被击中, 则部队 1 的收益为 $v(t)$, 部队 2 的收益为 $-v(t)$; 如果没有目标被击中, 则两个部队的收益都为 0。
- (1) 请将这个情形表示为一个策略博弈。
- (2) 请证明: 在任意一个混合策略均衡中, 部队 1 攻击目标 1 和目标 2 的概率都大于 0。
- (3) 请证明: 如果 $v(3) \leq v(2)v(1)/(v(1)+v(2))$, 那么, 这个博弈有一个均衡, 在这个均衡中, 目标 3 未被攻击且未被保护。
17. 委员会。委员会的三个成员(成员 1、成员 2、成员 3)对哪个选择是最优的存在争议。成员 1 和成员 2 更偏好 A, 而成员 3 更偏好 B。每人分别决定是否参加会议; 如果参加, 则为其最偏好的选择投票。而票数最多的选择最终当选。如果每个选择所得票数相等(包括无人参会的情况), 则每个选择当选的概率为 $\frac{1}{2}$ 。每个参与者的收益取决于是否参会, 以及最终当选的是否是其偏好的那个选择, 如下所示:

	偏好	不偏好
参会	$1-c$	$-c$
不参会	1	0

- 假设 $c < \frac{1}{2}$ 。如果成员 1 和成员 2(都偏好 A)采用相同的策略, 请找出该策略博弈的混合策略均衡。请证明, 在这个混合策略均衡中 A 当选的概率小于 1, 并分析均衡时的预期收益与 c 有什么关系。
18. 奥尼尔博弈。四张卡片分别标记为 2、3、4、J, 博弈的两个参与者各抽取一张卡片。
- 如果以下任意一个条件成立:
- (1) 两个参与者抽取的是两张标记了不同数字的卡片(2、3 或 4);
- (2) 两个参与者都抽取了 J。
- 则参与者 1 获胜; 否则, 参与者 2 获胜。请将这个情形表示为一个策略博弈, 并求出这个博弈的混合策略均衡。

本章说明

策略博弈模型由 Borel(1921)和 von Neumann(1928)提出。纳什均衡的定义由 Nash(1950)提出, 它参考了 Cournot(1838, Chapter 7)。

命题 15.2 是 Topkis(1979)得到的结论的一个简单示例。严格竞争博弈理论由 von Neumann 和 Morgenstern(1944)提出。康德均衡的定义由 Roemer(2010)提出。混合策略的定义由 Borel(1921, 1924, 1927)提出。

旅行者困境(例 15.1)由 Basu(1994)提出。囚徒困境(例 15.2)可能最早是 Melvin Dresner 和 Merrill Flood 在 1950 年提出的(详见 Flood, 1958, 1959)。用博弈论理论对拍卖进行研究(例 15.6 和例 15.7)则始于 Vickrey(1961)。位置博弈(例 15.8)由 Hotelling(1929)提出。设定产量的生产者的模型(例 15.10)由 Cournot(1838)提出,设定价格的生产者的模型(例 15.11)以 Bertrand(1883)命名。消耗战(例 15.15)由 Maynard Smith(1974)提出。

蜈蚣博弈(课后习题第 1 题)由 Rosenthal(1981)提出,课后习题第 5 题的博弈由 Moulin(1986:72)提出,课后习题第 18 题的博弈由 O'Neill(1987)提出。

▶ 16

扩展式博弈

假设在一个市场中提供产品的只有唯一一个生产者,我们称其为在位者。另外一个生产者正在考虑进入这个市场,我们称其为后来者。这个在位者想独占这个市场并希望能因此阻止后来者进入。如果后来者进入市场,在位者要在与之打价格战和与之合作之间做出选择。对于双方来说,价格战都是最坏的结果;对后来者来说,在位者选择合作是最好的,而对在位者来说,选择合作比打价格战更好,但比独占市场要差。

我们可以将该情形表示成一个策略博弈。后来者(参与者 1)决定是否进入该市场(“进入”或“不进入”)。如果后来者选择进入市场,那么在位者(参与者 2)决定与后来者竞争还是合作。该博弈如下所示:

	竞争	合作
进入	0, 0	2, 2
不进入	1, 5	1, 5

该博弈中存在两个纯策略纳什均衡:(进入,合作)和(不进入,竞争)。在第二个均衡中,如果后来者进入,那么在位者会选择与之竞争,在位者的这个决策会阻止后来者进入市场。

只有在位者从一开始就决定与进入市场的后来者竞争,且在后来者真的进入市场之后在位者也不重新选择,将这种情形表示为策略博弈才是有意义的。如果在位者可以重新选择,那么上述分析是不合理的:因为后来者进入后,在位者选择合作会比打价格战更好。所以,在分析当前这个问题时,应该在模型中明确地说明所有决策的时间顺序。图 16.1 就是一个这样的策略博弈。博弈从初始结点(initial node)开始,初始结点在图中表示为一个小圆圈。初始结点上方的标签表示启动博弈的那个参与者(参与者 1,后来者)。从初始结点处延伸出的两条分支(标着“进入”和“不进入”)表示可供后来者选择的行动。后来者如果选择不进入,则博弈结束;如果选择进入,则参与者 2(即在位者)将在合作和竞争中二选一。终结点(endpoints)的收益表示每个参与者的偏好:参与者 1(他的收益是括号里第一个数)的偏好关系为(进入,合作) $>$ 不进入 $>$ (进入,竞争),参与者 2 的偏好关系为

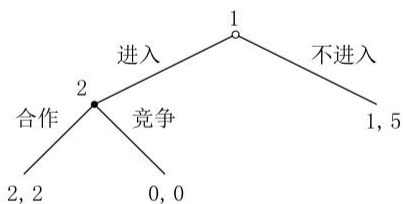


图 16.1 市场进入博弈

不进入 $\succ$ (进入, 合作) $\succ$ (进入, 竞争)。

我们将由一连串行动组成的序列称为历史(history)。图 16.1 中有五个历史。初始节点表示一个空历史, 因为参与者尚未采取任何行动。标有实心圆点的结点表示一个历史(进入)。其他三个历史(进入, 合作)、(进入, 竞争)和(不进入)都连接着博弈的终结点。我们将这些连接博弈的终结点的历史称为终点历史(terminal history); 将其他历史(参与者在其后仍需继续选择行动的历史)称为非终点历史(nonterminal history)。

16.1 扩展式博弈和子博弈精炼均衡

一个扩展式博弈包括一个参与者的集合、一个历史的集合、一个参与者函数(给每个非终点历史分配一个参与者), 以及每个参与者对终点历史的偏好。我们仅研究有限历史的博弈。

定义 16.1: 有限的扩展式博弈

一个(有限的)扩展式博弈 $\langle N, H, P, (\succsim^i)_{i \in N} \rangle$ 由以下几部分组成:

参与者

一个参与者的集合 $N = \{1, \dots, n\}$ 。

历史

一个历史的集合 H , 每个历史都是有限的一连串行动。空历史 $\emptyset$ 属于集合 H , 且如果 $(a_1, a_2, \dots, a_t) \in H$, 则 $(a_1, a_2, \dots, a_{t-1}) \in H$ 。

如果不存在 x 使得 $(h, x) \in H$, 那么历史 $h \in H$ 是一个终点历史。由终点历史构成的集合表示为 Z 。[我们用 $(h, a_1, a_2, \dots, a_t)$ 表示从历史 h 开始且后续行动为 $a_1, \dots, a_t$ 的历史]。

参与者函数

函数 $P: H \setminus Z \rightarrow N$ 为参与者函数, 它给每个非终点历史分配一个参与者(这个参与者在该历史之后做决策)。

偏好

每一个参与者 $i \in N$ 都对 Z 有一个偏好关系 $\succsim^i$ 。

我们定义的模型适用于这样一种情况: 每个参与者在选择其行动前都已经知道此前所有行动。因此, 该模型又被称为完全信息扩展式博弈。在更一般的模型

中,参与者对此前出现的行动并不完全了解,但我们不讨论这类模型。

图 16.1 所示的例子是一个扩展式博弈 $\langle N, H, P, (\succsim^i)_{i \in N} \rangle$, 其中:

- $N = \{1, 2\}$;
- $H = \{\emptyset, (\text{不进入}), (\text{进入}), (\text{进入}, \text{合作}), (\text{进入}, \text{竞争})\}$ ($Z = \{(\text{不进入}), (\text{进入}, \text{合作}), (\text{进入}, \text{竞争})\}$);
- $P(\emptyset) = 1$ 且 $P(\text{进入}) = 2$;
- $(\text{进入}, \text{合作}) \succ^1 (\text{不进入}) \succ^1 (\text{进入}, \text{竞争})$, 并且 $(\text{不进入}) \succ^2 (\text{进入}, \text{合作}) \succ^2 (\text{进入}, \text{竞争})$ 。

注意,我们使用符号 $P(\text{进入})$ 而不是 $P((\text{进入}))$;之后,我们也简写为 $P(a_1, \dots, a_t)$, 而不是写为 $P((a_1, \dots, a_t))$ 。

在对扩展式博弈进行分析时,一个核心概念是策略。参与者的策略是指,为每一个历史都指定一个具体的行动选择,表明他在该历史出现之后将会采取的行动。

定义 16.2: 扩展式博弈的策略

在一个扩展式博弈 $\langle N, H, P, (\succsim^i)_{i \in N} \rangle$ 中,参与者 $i \in N$ 的策略是这样一个函数:为每一个历史 $h \in H \setminus Z$ (其中 $P(h) = i$) 选定集合 $\{x: (h, x) \in H\}$ 中的一个行动,其中 $\{x: (h, x) \in H\}$ 指的是在历史 h 后该参与者可选择的行动的集合。

该定义的关键词是“每一个”:参与者的策略设定了该参与者在每一个历史之后需要做决策的时候所选择的行动,这些历史甚至包括只要参与者遵循自己的策略就不会发生的历史。举例来说,如图 16.2 的博弈所示,参与者 1 的策略是 s^1 , 其中 $s^1(\emptyset) = A$ 且 $s^1(B, G) = I$ 。如果参与者 1 遵循策略 s^1 , 在博弈开始时就选择 A , 那么历史 (B, G) 就不会发生,但是该策略仍设定了参与者 1 在历史 (B, G) 之后的行动。因此,上述定义中的“策略”与我们日常生活中所说的“策略”不是一个意思。我们将在 16.2 节进一步讨论这个问题。

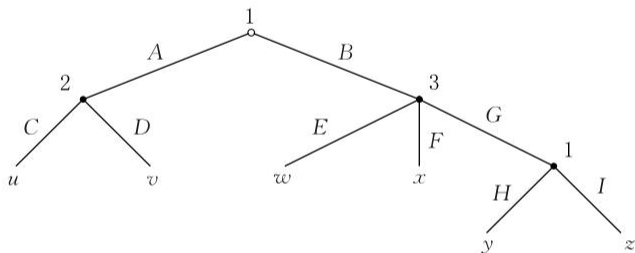


图 16.2 扩展式博弈的一个例子

当参与者按照策略行动时,每个策略组合会产生一个唯一的终点历史 $(a_1, \dots, a_T)$, 这个历史的第一个元素 a_1 是指在博弈中最先行动的参与者 $P(\emptyset)$ 的策略 $s^{P(\emptyset)}$ 所设定的行动 $s^{P(\emptyset)}(\emptyset)$ 。 a_1 决定了下一个采取行动的参与者是谁, 即 $P(a_1)$, 其策略 $s^{P(a_1)}$ 设定了下一个行动 $a_2 = s^{P(a_1)}(a_1)$, 以此类推。

定义 16.3: 策略组合产生的终点历史

假设 s 是扩展式博弈 $\langle N, H, P, (\geq^i)_{i \in N} \rangle$ 的策略组合。由策略组合 s 产生的终点历史是 $(a_1, \dots, a_T)$, 其中 $a_1 = s^{P(\emptyset)}(\emptyset)$, 且对于 $t=1, \dots, T-1$, 有 $a_{t+1} = s^{P(a_1, \dots, a_t)}(a_1, \dots, a_t)$ 。

在扩展式博弈中, 我们主要用到的解的概念是子博弈精炼均衡 (subgame perfect equilibrium)。在给予博弈精炼均衡下定义之前, 我们首先定义扩展式博弈的纳什均衡: 对于某一个策略组合来说, 如果给定其他参与者的策略, 没有一个参与者能够通过改用别的策略而得到对他来说更好的结果, 那么这个策略组合就是纳什均衡。

定义 16.4: 扩展式博弈的纳什均衡

假设 $\Gamma = \langle N, H, P, (\geq^i)_{i \in N} \rangle$ 是一个扩展式博弈。如果对每个参与者 $i \in N$ 的每个策略 r^i , 都有 $z(s) \geq^i z(s^{-i}, r^i)$, 则策略组合 s 是扩展式博弈 Γ 的一个纳什均衡, 其中, 对任意一个策略组合 σ , $z(\sigma)$ 是由 σ 所产生的终点历史。

如图 16.1 所示, 在这个市场进入博弈中有两个纳什均衡: (进入, 合作) 和 (不进入, 竞争)。(不进入, 竞争) 是一个纳什均衡, 因为给定在位者的策略“竞争”, 后来者最好选择“不进入”; 同理, 给定后来者的策略“不进入”, 在位者最好选择“竞争”。实际上, 如果后来者选择“不进入”, 那么在位者选择“竞争”或“合作”都是最优的。

如果后来者选择“进入”, 在位者选择“竞争”并非最优策略, 但这并不影响 (不进入, 竞争) 成为一个纳什均衡: 纳什均衡的概念仅考虑在博弈开始时, 即还没有采取任何行动之前, 参与者的策略的最优性。

相比之下, 子博弈精炼均衡的概念要求: 给定其他参与者的策略, 在每一个可能的历史 (无论该参与者采取其策略后该历史是否发生) 之后, 每一个参与者的策略都是最佳的。在给予博弈精炼均衡下定义之前, 我们首先定义“延伸非终点历史所得的终点历史”: 对任意一个策略组合 s 和非终点历史 h , 在 h 发生后参与者选择策略组合 s 所设定的行动, 由此得到的结果就被称为“延伸非终点历史所得的终点历史”。

定义 16.5: 延伸非终点历史所得的终点历史

假设 s 是扩展式博弈 $\langle N, H, P, (\geq^i)_{i \in N} \rangle$ 的一个策略组合, h 是一个非终点历史。由策略组合 s 产生的延伸非终点历史所得的终点历史 (表示为 $z(h, s)$) 是 $(h, a_1, \dots, a_T)$, 其中 $a_1 = s^{P(h)}(h)$, 当 $t=1, \dots, T-1$ 时 $a_{t+1} = s^{P(h, a_1, \dots, a_t)}(h, a_1, \dots, a_t)$ 。

举例来说, 在图 16.2 的博弈中, 如果 $h=B$ 且参与者的策略为 $s^1(\emptyset)=A$ 、 $s^1(B, G)=H$ 、 $s^2(A)=C$ 、 $s^3(B)=G$, 那么由 s 产生的延伸 h 所得的终点历史是 (B, G, H) 。

定义 16.6: 扩展式博弈的子博弈精炼均衡

假设 $\Gamma = \langle N, H, P, (\geq^i)_{i \in N} \rangle$ 是一个扩展式博弈。如果对于每个参与者

$i \in N$ 以及每个非终点历史 h (其中 $P(h) = i$) 来说, 对参与者 i 的每个策略 r^i 都有 $z(h, s) \geq z(h, (s^{-i}, r^i))$, 那么策略组合 $s = (s^i)_{i \in N}$ 是 Γ 的一个子博弈精炼均衡。其中, 对于任意一个历史 h 和策略组合 σ , $z(h, \sigma)$ 都是由策略组合 σ 产生的延伸 h 所得的终点历史。

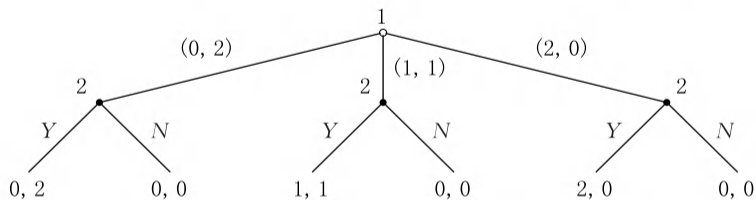
该定义与纳什均衡定义的区别在于“以及每个非终点历史 h (其中 $P(h) = i$)”这部分。纳什均衡的概念要求(给定其他参与者的策略时)每个参与者的策略在博弈开始时都是最优的, 而子博弈精炼均衡的概念则要求(给定其他参与者的策略时)每个参与者的策略在每个历史之后都是最优的, 即使某些历史在参与者按照策略行动的情况下并不发生。

每一个子博弈精炼均衡都是一个纳什均衡, 但纳什均衡不一定是子博弈精炼均衡。在市场进入博弈(图 16.1)的子博弈精炼均衡中, 在历史“进入”之后, 在位者一定会选择策略“合作”, 因为相对于终点历史(进入, 竞争), 在位者更偏好(进入, 合作)。给定在位者的策略, 后来者最好选择策略“进入”。而纳什均衡(不进入, 竞争)就不是一个子博弈精炼均衡, 因为在历史“进入”之后, “竞争”对于在位者而言不是最优选择。

例 16.1: 最后通牒博弈

有两单位不可分割的商品, 两个参与者必须决定怎么分配这两单位商品。如果这两个参与者无法达成一致, 那么两人都一无所获。他们采用“要么接受要么放弃”的方法决定商品的分配: 这两单位商品有三种分配方案, 参与者 1 选择并提议一种分配方案, 参与者 2 要么接受该提议, 要么拒绝该提议。每个参与者仅关心他获得的商品数量(越多越好), 而不关心其他参与者获得的商品数量。

我们用 (x^1, x^2) 表示一个提议, 参与者 i 获得 x^i , 且 $x^1 + x^2 = 2$ 。该情形能用以下扩展式博弈来表示。博弈开始时(空历史 $\emptyset$), 参与者 1 在 $(0, 2)$ 、 $(1, 1)$ 、 $(2, 0)$ 中选择一个作为提议, 参与者 2 要么接受(Y)要么拒绝(N)它。



参与者 1 有三种策略, 参与者 2 有八种策略。参与者 2 的每个策略都设定了对参与者 1 每个可能的提议作出的反应。举例来说, (Y, Y, Y) 表示参与者 2 接受所有的提议; (Y, N, N) 表示参与者 2 接受提议 $(0, 2)$ 而拒绝其他两个提议。

该博弈有多个纳什均衡。特别地, 对于任意一个分配方案, 该博弈都有一个纳什均衡: 参与者 1 提议一种分配方案, 参与者 2 接受该提议并拒绝其他两个提议。 $((2, 0), (N, N, N))$ 也是一个纳什均衡, 两人最终未达成一致。

接下来, 我们来讨论纳什均衡 $((0, 2), (Y, N, N))$ 。参与者 2 的策略是仅接受 $(0, 2)$ 这个提议, 他可以因此获得 2 单位商品。然而, 参与者 2 威胁参与者 1 要

拒绝(1, 1)是不可信的, 因为如果参与者 1 提议(1, 1)而参与者 2 拒绝, 他连一单位商品也得不到, 相反, 如果他接受还可以得到一单位商品。所以参与者 2 会选择接受。

在任意一个子博弈精炼均衡中, 参与者 1 提出每个提议后, 参与者 2 的行动都必须是最优的, 所以参与者 2 会接受(0, 2)和(1, 1)两个提议。参与者 2 认为接受或拒绝(2, 0)是无差异的, 所以在子博弈精炼均衡中可能拒绝也可能接受(2, 0)。因此, 参与者 2 的所有策略中只有(Y, Y, Y)和(Y, Y, N)与子博弈精炼均衡相符。如果参与者 2 采用策略(Y, Y, Y), 那么参与者 1 最好提议(2, 0); 如果参与者 2 采用策略(Y, Y, N), 那么参与者 1 最好提议(1, 1)。因此, 该博弈有两个子博弈精炼均衡: ((2, 0), (Y, Y, Y))和((1, 0), (Y, Y, N))。

如果要分配 K 单位而不是 2 单位商品, 则该博弈有两个子博弈精炼均衡: ((K , 0), (Y, ..., Y))和(($K-1$, 1), (Y, ..., Y, N))。在第一个均衡中, 参与者 1 提议自己获得 K 单位商品, 参与者 2 同意参与者 1 提出的所有提议。在第二个均衡中, 参与者 2 仅拒绝一单位商品也不给他的提议, 参与者 1 提议给参与者 2 一单位商品。

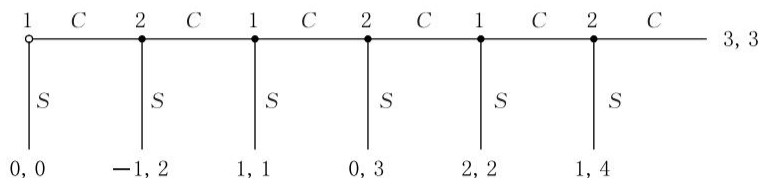
例 16.2: 蜈蚣博弈

两个参与者 1 和 2 轮流享有停止博弈的权利, 参与者 1 先选择是否停止。每个参与者有 T 次机会进行选择。如果一个参与者选择继续(C)则将失去 1 美元, 而另一个参与者将获得 2 美元。每个参与者都希望博弈结束时其所获的金钱越多越好。

上述情形可以被表示为一个扩展式博弈, 历史的集合包括 $2T$ 个非终点历史, 形式为 $C_t = (C, \dots, C)$, 其中 $t \in \{0, \dots, 2T-1\}$ 是非终点历史 C 发生的个数 ($C_0 = \emptyset$, 空历史); ($T+1$) 个终点历史, 包括 C_{2T} (两个参与者都选择 C) 和 $S_t = (C, \dots, C, S)$, 其中 $t \in \{0, \dots, 2T-1\}$, t 是 C 发生的次数 (参与者在第 t 次选择 C, 然后其中一个参与者选择 S)。

在历史 C_t 后, 如果 t 是偶数 (包括 0), 参与者 1 进行选择; 如果 t 是奇数, 参与者 2 进行选择。每个参与者的收益从 0 开始计算, 如果该参与者选择 C 则其收益减 1, 如果其他参与者选择 C 则该参与者的收益加 2。 $T=3$ 时的博弈如下所示 (博弈树的形状像一条“蜈蚣”, “蜈蚣博弈”由此得名。)

每个参与者打算在第一次做选择时就停止博弈的任意一个策略组合都是一个纳什均衡。如果参与者 2 打算在一开始就选择停止博弈, 而参与者 1 改变其策略选择不停止, 其利益就会受损; 如果已知参与者 1 打算在一开始就停止博弈, 那么



参与者 2 选择停止还是继续博弈都是一样的。

实际上,我们可以证明,在每个纳什均衡中,参与者 1 都将在一开始就选择停止博弈。也就是说,纳什均衡产生的唯一一个终点历史是 S_0 。对于任何产生终点历史 $S_t (t \geq 1)$ 的策略组合,在历史 C_{t-1} 后行动的参与者,选择在这个历史之后改变策略,停止博弈,就可以降低因继续博弈而造成的损失。当且仅当每个参与者在每个机会都选择策略 C 时,终点历史 C_{2T} 才会发生,但是参与者 2 可以选择在 C_{2T-1} 后停止博弈以增加其收益。

虽然每个纳什均衡的结果都是 S_0 ,但是该博弈有许多纳什均衡。在每个均衡中,参与者 1 在博弈开始时选择 S 且参与者 2 在历史 (C) 后选择 S ,但随后每个参与者可以选择 C ,也可以选择 S 。

然而,该博弈仅有一个子博弈精炼均衡,即每个参与者无论何时进行选择都选择 S 。可用归纳法证明,从后往前推:在历史 C_{2T-1} 之后,参与者 2 的最优选择是停止博弈;如果在历史 $C_t (t \geq 1)$ 后参与者选择停止博弈,那么在 C_{t-1} 后参与者最好也选择停止博弈。

但在实验中,人们往往不会在一开始就停止博弈。这与均衡的结果不同,可能有两个原因:首先,明明有机会可以互利共赢,但为了赚 1 美元而停止博弈,导致另一参与者损失 2 美元,许多人都会觉得不好意思;其次,人们至少会继续博弈一段时间,因为他们不确定另一参与者的想法,并且鉴于继续博弈的潜在收益,他们愿意损失 1 美元来弄清楚另一个参与者的想法。

16.2 策略是什么?

以蜈蚣博弈($T=3$)中参与者 1 的策略(S, C, C)为例。根据这个策略,参与者 1 打算在一开始就停止博弈,但是后来(在历史 (C, C) 和 (C, C, C) 之后)打算继续博弈。参与者 1 的策略要成为一个完整的行动计划,必须设定对参与者 2 每一个可能的行动所做出的反应。但是,扩展式博弈的策略远不止于此。举例来说,根据策略(S, C, C),参与者 1 打算在一开始就停止博弈,但这个策略也指定了该参与者有第二次停止博弈的机会时会选择的行动(如果他遵循了自己的策略,在一开始就停止博弈,就不会有第二次选择的机会)。也就是说,该策略甚至设定了实际情况与其策略不一致时参与者会选择的行动。

从这个角度来看,扩展式博弈中的策略与行动计划不同,行动计划只包括与该计划一致的历史之后的行动。在 $T=3$ 的蜈蚣博弈中,参与者 1 有 4 个行动计划:总是选择继续,以及在第 t 次机会时选择停止($t=1, 2, 3$)。

为什么我们要确定一个比行动计划更详尽的策略?当参与者 2 打算在历史 (C) 后进行选择时,需要考虑如果他不停止博弈会发生什么。也就是说,他需要考虑参与者 1 在历史 (C, C) 后会做何选择。参与者 1 的策略(S, C, C)中的第二个元素(即参与者 1 在历史 (C, C) 后选择的行动)可以被看作是参与者 2 认为如果参

与者 1 不停止博弈的话,在历史 (C, C) 后将会采取的行动。因此,在蜈蚣博弈以及在其他参与者不止进行一次选择的扩展式博弈中,策略组合不只是一个行动计划,还包括参与者对任意一个历史后会发生的事情的预期。

16.3 逆向归纳法

逆向归纳法是一个在扩展式博弈中选择策略组合的方法。它基于假设:参与者选择行动时可以准确预测随后会发生什么,他会据此选择使其收益最大的行动。这个方法从终点历史的上一步的历史开始分析,每次都倒推一步,一直到博弈开始。

在描述逆向归纳法之前,我们首先要定义历史 h 的直径,即从 h 开始的历史中最长的那个历史距博弈结束还有几步。

定义 16.7:历史的直径

存在一组行动 $a_1, \dots, a_K$ 使得 $(h, a_1, \dots, a_K)$ 是一个历史,扩展式博弈中历史 h 的直径是满足这个条件的 K 的最大值。

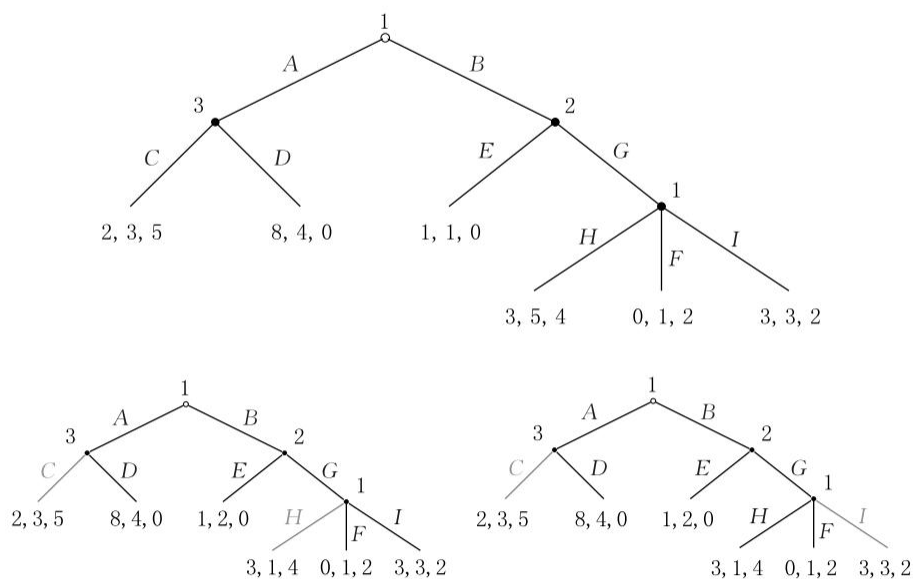
请注意,只有终点历史直径为 0;空历史的直径是最长的历史中所包括的行动的数量。

逆向归纳法从设定每一个在直径为 1 的历史之后行动的参与者所选择的行动开始,然后逐步向前倒推到博弈的开始。这样一来,它将每个历史 h 与终点历史 $z(h)$ 联系起来。如果博弈达到 h ,而参与者接下来采取之前步骤中设定的行动,那么得到的结果就是 $z(h)$ 。

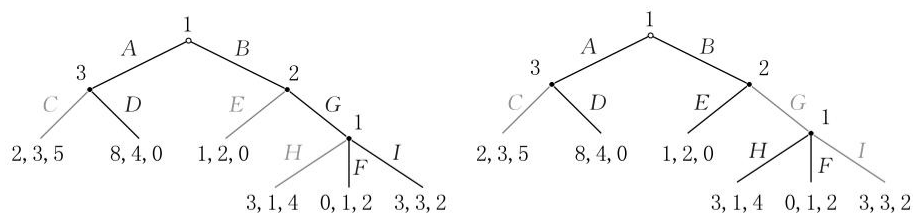
第一步,对于每个终点历史 h ,我们定义 $z(h)=h$ 。

第二步,我们首先来看直径为 1 的历史。设 h 为这样一个直径为 1 的历史,参与者 $P(h)$ 将在历史 h 后作出选择。[在图 16.3 的博弈中,如上所述的两个历史分别为 A 和 (B, G) ,需要做出选择的参与者分别是 $P(A)=3$ 和 $P(B, G)=1$]。对于 $P(h)$ 在 h 后采取的每个行动 a ,历史 (h, a) 的直径都为 0[即 (h, a) 是终点历史],因此由第一步可得 $z(h, a)=(h, a)$ 。在这些行动中,设 $a=a^*(h)$ 是在所有终点历史 $z(h, a)$ 中使得 $P(h)$ 收益最大的行动,设 $s^{P(h)}(h)=a^*(h)$ 。请注意,如果这样的行动不止一个,我们将随机选择一个。[在图 16.3 的博弈中,在历史 (A) 后参与者 3 选择行动 C ,在历史 (B, G) 后参与者 1 可以选择行动 H ,也可以选择 I 。]定义 $z(h)=z(h, a^*(h))$,即在历史 h 后参与者 $P(h)$ 选择 $a^*(h)$ 时所得的终点历史。

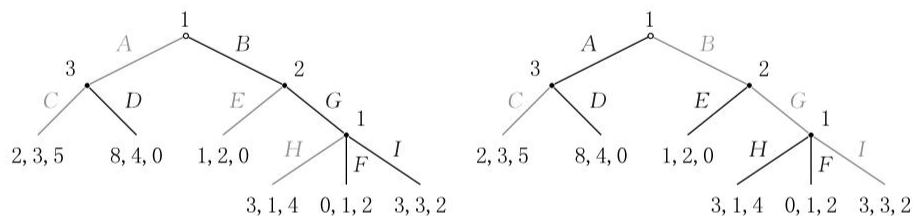
逆向归纳法持续从后往前推,一直推到博弈开始。在第 k 步后,对于每个直径小于等于 k 的历史,在历史 h 后行动的参与者所选择的行动以及所得的终点历史 $z(h)$ 都已确定,因此,在第 $(k+1)$ 步,我们能确定在每个直径为 $(k+1)$ 的历史后行动的参与者的最优选择。如此下来,利用逆向归纳法最后可得出每个参与者的策略。



第一步:在每个直径为1的历史后行动的参与者选择最优行动。在历史(A)后的最优行动是C。在历史(B, G)后,H和I都是最优行动。上图显示了第一步的两种可能结果。



第二步:直径为2的历史只有一个,在这个历史后行动的参与者选择最优行动。



第三步:直径为3的历史(空历史)只有一个,在这个历史后行动的参与者选择最优行动。

图 16.3 逆向归纳法的一个例子

注:在该博弈中,逆向归纳法在两个策略组合中选择一个,生成的最终历史为(A, C)或(B, G, I)。

程序:逆向归纳法

一个扩展式博弈 $\langle N, H, P, (\geq^i)_{i \in N} \rangle$ 的逆向归纳法按以下步骤产生策略组合 s 。对于任意一个历史 $h \in H$,将 h 的直径表示为 $d(h)$ 。

初始化

对于每个满足 $d(h)=0$ 的历史 h (即每个终点历史), 令 $z(h)=h$ 。

归纳步骤

假设: 对于所有满足 $d(h) \in \{0, \dots, k\}$ 的 $h \in H$, 都确定了终点历史 $z(h)$; 对于所有满足 $d(h) \in \{1, \dots, k\}$ 的 $h \in H$, 都确定了 $s^{P(h)}(h)$, 其中, $k < d(\emptyset)$ 。对于每个满足 $d(h)=k+1$ 的历史 h , 根据 $P(h)$ 对所有终点历史 $z(h, a)$ 的偏好, 如果 $a^*(h)$ 是偏好程度最高的行动, 那么, $s^{P(h)}(h)=a^*(h)$ 且 $z(h)=z(h, a^*(h))$ 。

根据以上步骤得到的策略组合 s 被我们称为由逆向归纳法生成的策略组合。

当且仅当存在最优行动时, 这个方法才适用。特别地, 对于有限历史的博弈, 这个方法总是适用的。如果某些历史之后的行动的数量是无限的, 则可能不存在最优行动, 那么这个方法就不适用了。

下面我们要证明由逆向归纳法产生的任意一个策略组合都是一个子博弈精炼均衡。在此之前, 我们先讨论扩展式博弈的子博弈精炼均衡的另一个重要性质。

回忆一下之前的定义: 如果不存在一个历史 h , 使得在这个历史后, 参与者有另一策略, 相对于由 h 之后的 s 产生的终点历史, 该参与者更偏好这个策略产生的终点历史, 那么策略组合 s 就是子博弈精炼均衡。特别地, 对于任意一个历史, 参与者不能仅改变在该历史后的行动而不改变其他行动而得到一个对他来说更好的结果。我们称这种策略组合满足单阶段偏离性质 (one-deviation property of strategy profile)。

定义 16.8: 策略组合的单阶段偏离性质

设 $\Gamma = \langle N, H, P, (\geq^i)_{i \in N} \rangle$ 是一个扩展式博弈。如果对于任意一个参与者 $i \in N$ 和任意一个非终点历史 $h \in H \setminus Z(P(h)=i)$ 来说, 对参与者 i 的每个策略 r^i (r^i 和 s^i 仅在 h 后指定的行动有所不同) 都有 $z(h, s) \geq^i z(h, (s^{-i}, r^i))$, 则扩展式博弈 Γ 的策略组合 s 满足单阶段偏离性质。

如果一个策略组合是子博弈精炼均衡, 则它满足单阶段偏离性质。这是因为对任意一个历史和参与者, 子博弈完美均衡要求参与者的策略在所有策略中是最优的, 而单阶段偏离性质仅要求参与者的策略在该历史之后的行动有所不同的那些策略中是最优的。

接下来, 我们来证明上一段那个命题的逆命题也成立: 任意一个满足单阶段偏离性质的策略组合是子博弈精炼均衡。为证明这个命题, 我们假设与之相反: 策略组合 s 满足单阶段偏离性质, 根据这个策略组合参与者 i 可得收益 u^i , 但在某一个历史 h 后, 参与者 i 不选择 s 指定的行动而选择另一行动, 可以获得更大的收益 $v^i > u^i$ 。比如, 在图 16.4 中, 把行动从 a 改为 a' ; 再比如, 在历史 h 被扩展到 h' 之后, 参与者把行动从 b 改为 b' (给定其他参与者的策略)。由于 s 满足单阶段偏离性质, (在参与者 i 仅在历史 h 处改变他的行动之后) 根据策略组合 s 参与者 i 在 h' 所得的收益 (比如说 w^i) 小于等于 u^i 。但由于 $v^i > w^i$, 在 h' 后参与者 i 仅改变 h'

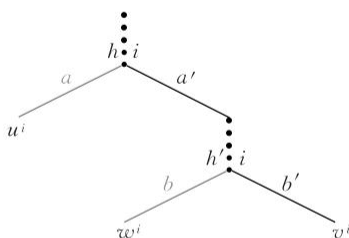


图 16.4 满足单阶段偏离性质的策略组合是子博弈精炼均衡

后的行动(从 b 到 b')而不改变其他行动,就可以得到一个比 w^i 更高的收益,这与 s 满足单阶段偏离性质的假设相矛盾。

命题 16.1: 单阶段偏离性质和子博弈精炼均衡

在一个扩展性博弈(每个终点历史都是有限的)中,当且仅当策略组合是子博弈精炼均衡时,才满足单阶段偏离性质。

证明:正如我们之前讨论过的,如果策略组合是子博弈精炼均衡,则它一定满足单阶段偏离性质。

令 s 为一个满足单阶段偏离性质的策略组合。假设与命题相反: s 不是一个子博弈精炼均衡。那么对于某一个参与者 i ,存在一个非空历史集合 H^* 使得在任意一个 $h \in H^*$ 后,参与者 i 如果改变策略会产生一个比 $z(h, s)$ (即由 s 产生的扩展历史 h 后所得的终点历史)更好的终点历史。对于任意一个 $h \in H^*$,在某个历史 h' 后参与者 i 的策略需设定一个不同于 $s^i(h')$ 的行动,形成一个新的策略组合,由此产生一个对于参与者 i 来说比 $z(h, s)$ 更好的终点历史。令 $n(h)$ 表示满足这个条件的历史 h' 的最小数量。

令 H^{**} 为 H^* 的一个子集,它是所有子集中使得 $n(h)$ 最小的一个子集。设 $h^* \in H^{**}$ 是 H^{**} 中最长的历史,设 r^i 是做了 $n(h^*)$ 次修改后的新策略,且满足 $z(h^*, (s^{-i}, r^i)) >^i z(h^*, s)$ 。于是, $r^i(h^*) \neq s^i(h^*)$, 否则有 $(h^*, s^i(h^*)) \in H^{**}$, 这个历史比 h^* 更长,与假设矛盾。策略 r^i 在 $(h^*, r^i(h^*))$ 之后的改变次数少于 $n(h^*)$, 因此由 $n(h^*)$ 是最小值,可得:

$$z(h^*, (s^{-i}, r^i)) = z((h^*, r^i(h^*)), (s^{-i}, r^i)) \leq^i z((h^*, r^i(h^*)), s)$$

由于 s 满足单阶段偏离性质: $z((h^*, r^i(h^*)), s) \leq^i z(h^*, s)$, 这意味着: $z(h^*, (s^{-i}, r^i)) \leq^i z(h^*, s)$, 这与上一段中的结论矛盾。

请注意,这个证明以以下条件为前提:所有历史都是有限的。实际上,如果不是所有的历史都是有限的,那么策略组合可能满足单阶段偏离性质,但不是子博弈精炼均衡(详见课后习题第 9 题)。

在许多博弈中,命题 16.1 大大简化了某个策略组合是不是子博弈精炼均衡的判断,我们仅需验证在每个历史之后该采取行动的参与者如果改变其行动是否会因此获益。

接下来,我们要证明由逆向归纳法产生的策略组合是子博弈精炼均衡,主要通过证明它满足单阶段偏离性质来论证。

命题 16.2: 逆向归纳法和子博弈精炼均衡

在一个(每个终点历史是有限的)扩展式博弈中,当且仅当策略组合是一个子博弈精炼均衡时,它才能由逆向归纳法得出。

证明:由逆向归纳法产生的策略组合满足单阶段偏离性质。因此,由命题 16.1 可得,这个策略组合是一个子博弈精炼均衡。

反过来,如果一个策略组合是子博弈精炼均衡,则它满足单阶段偏离性质,因此它一定可以由逆向归纳法得出,在使用逆向归纳法的过程中的每一步,我们都选择该策略组合所设定的行动。

由命题 16.2 可直接推出:每个历史数量有限的扩展式博弈都有一个子博弈精炼均衡,因为对于每个这样的博弈,逆向归纳法都适用。

命题 16.3: 历史数量有限的博弈中子博弈精炼均衡的存在性

每个历史数量有限的扩展式博弈都有一个子博弈精炼均衡。

举例来说,国际象棋就是一个历史数量有限的扩展式博弈。在此博弈中,两名参与者轮流行动。终点历史有三种:参与者 1 赢、参与者 2 赢,以及两人平局。每个参与者相对于输更喜欢平局,相对于平局更喜欢赢。这个博弈是有限的,因为如果同一步棋重复走三次,就宣布平局。虽然历史的数量是有限的,但其数量很多,以至于如今没有计算机可以对这个博弈使用逆向归纳法。然而,由命题 16.3 可知,国际象棋的博弈中有子博弈精炼均衡。国际象棋的博弈是严格竞争的,所以(由命题 15.3)可知,所有纳什均衡中的收益都是一样的,且纳什均衡策略是最大化最小值策略:任意一个参与者都有一个策略可确保他赢得博弈,或至少确保结果是平局。

严格竞争且历史数量有限的扩展式博弈的另一例子是井字棋(ticktacktoe)。在井字棋中,每个参与者都能保证结果是平局。国际象棋比井字棋更好玩,因为我们无法预知参与者在国际象棋中能获胜还是以平局结束;相对于井字棋,国际象棋更依赖参与者的认知能力。有限理性模型旨在研究认知能力差异所产生的影响,我们在本书中对此不予讨论。

16.4 讨价还价模型

本节将介绍几种讨价还价模型,以说明如何用扩展式博弈分析经济生活中的问题。经济生活中讨价还价非常常见,因为讨价还价中既有共同利益也有冲突利益。双方都想达成协议,但是他们从不同协议中获得的收益有所不同。讨价还价模型是市场经济模型的重要组成部分,在这种市场经济模型中,两两匹配进行交易。这些市场模型与本书第二部分中介绍的市场模型不同:人们并不认为价格是固定不变的。

为简单起见,我们假定参与者 1 和参与者 2 就一个大小为 1 的总金额的分配讨价还价。所有可能达成的协议所构成的集合为:

$$X = \{(x^1, x^2); x^1 + x^2 = 1 \text{ 且 } x^i \geq 0, \text{ 其中 } i = 1, 2\}$$

讨价还价的结果是达成 X 中的一个协议或者未达成协议。我们假设参与者仅关心他们达成的协议,也可能会关心达成协议的时间,但参与者并不关心达成协议之前的谈判过程如何。特别是,如果一个参与者最终接受的协议比他之前拒绝过的协议更差,该参与者也不会觉得有损失。此外,我们假设每个参与者都认为未达成协议与一无所获一样。

接下来,我们讨论几个讨价还价的模型。在这几个讨价还价模型中,行动顺序以及每个参与者行动时的选择有所不同。我们将会看到,讨价还价程序的细节对讨价还价的结果有很大影响。

16.4.1 接受或拒绝(最后通牒博弈)

参与者 1 提议一种分配方案(集合 X 中的一个元素),参与者 2 选择接受或拒绝。(例 16.1 便是该博弈的一种,其中,可能达成的协议的集合是有限的。)

定义 16.9:最后通牒博弈

最后通牒博弈是由以下几部分组成的扩展式博弈 $\langle \{1, 2\}, H, P, (\geq^i)_{i \in \{1, 2\}} \rangle$ 。

历史

历史的集合 H 包含:

- $\emptyset$ (初始历史);
- (x) (参与者 1 提议一种分配方案 x),其中, $x \in X$;
- (x, y) (参与者 1 提议一种分配方案 x ,参与者 2 选择接受),其中, $x \in X$;
- (x, N) (参与者 1 提议一种分配方案 x ,参与者 2 选择拒绝),其中, $x \in X$ 。

参与者函数

$P(\emptyset) = 1$ (参与者 1 在博弈最开始时行动)且对于所有的 $x \in X$ 都有 $P(x) = 2$ (参与者 2 在参与者 1 提出分配方案后选择接受或拒绝)。

偏好

每位参与者 i 的偏好关系 $\geq^i$ 可用收益函数 u^i 表示,其中,对于所有的 $x \in X$,有 $u^i(x, Y) = x^i$, $u^i(x, N) = 0$ 。

这个博弈如图 16.5 所示。请注意,图 16.5(不同于之前博弈的图形分析)没有展示所有的历史,而是用三角形阴影表示参与者 1 的行动(无限多个)的集合,仅标出这些行动中的其中一个(即 x),以及在这一历史(x)之后参与者 2 可以选择的行动。

在最后通牒博弈中,参与者 1 的策略集合是 X ,且参

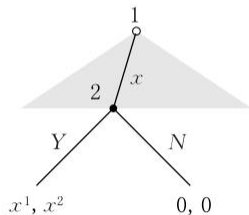


图 16.5 最后通牒博弈

与者 2 的策略是一个函数,该函数对于每个 $x \in X$ 指定一个 Y 或者 N 。该博弈有唯一的一个子博弈精炼均衡,即参与者 1 提议 $(1, 0)$,参与者 2 接受所有的提议。

命题 16.4:最后通牒博弈的子博弈精炼均衡

最后通牒博弈只有一个子博弈精炼均衡:参与者 1 提议 $(1, 0)$,参与者 2 接受所有提议。

证明:下述策略组合是一个子博弈精炼均衡:已知参与者 2 接受所有提议,对于参与者 1 来说提议 $(1, 0)$ 是最优的,且在任意一个提议之后参与者 2 选择接受 (Y) 是最优的。

现在设 s 是一个子博弈精炼均衡。对于提议 $x (x^2 > 0)$,参与者 2 的唯一最优的选择是接受,即 $s^2(x) = Y$,其中 $x^2 > 0$ 。因此,如果 $s^1(\emptyset) = (1 - \epsilon, \epsilon)$,其中 $\epsilon > 0$ (参与者 2 选择接受),那么参与者 1 可以通过提议 $(1 - \frac{1}{2}\epsilon, \frac{1}{2}\epsilon)$ 以获得更高的收益,因为参与者 2 也会接受这个提议。因此, $s^1(\emptyset) = (1, 0)$ 。最后, $s^2(1, 0) = Y$,因为如果参与者 2 拒绝 $(1, 0)$,则参与者 1 得到 0,并且可以提议另一种被参与者 2 接受的分配方案以获益。

请注意,如果参与者 1 提议 $(1, 0)$,参与者 2 认为选择 Y 或 N 是无差异的。然而,该博弈仅有一个子博弈精炼均衡,即参与者 2 接受 $(1, 0)$ 。相反,在例 16.1 的博弈中,可能达成的协议是有限的,该博弈也有一个子博弈精炼均衡,其中参与者 2 拒绝提议 $(1, 0)$ 。

讨价还价博弈的实验表明,人们的行为可能会与唯一的这个子博弈精炼均衡不一致。例如,来自世界各地的 19 000 名学生(与本书的读者群体相似)在网站 <http://gametheory.tau.ac.il> 上回答了一个问题,该问题要求他们假设自己和另一人分 100 美元。大概有 50% 的学生选择(50 美元,50 美元),仅有 11% 的学生像子博弈精炼均衡那样,选择给对方 0 美元或 1 美元。

我们不能因这个实验结果而质疑子博弈精炼均衡概念的正确性,但是可以得出结论:在策略博弈中,我们假定的参与者的偏好是不现实的。首先,有的人更偏好公平,这使得他们倾向于平均分配;其次,很多人认为让自己得到份额很低的分配方案简直是在侮辱人,因此拒绝这样的提议。考虑到现实情况,我们需要对参与者的偏好进行修改,(修改后的)博弈应该存在一个子博弈精炼均衡,在这个均衡中做出提议的参与者的收益要远小于总金额。

16.4.2 有限次轮流提议

现在,假设在参与者 2 拒绝参与者 1 的提议后,可以进行下一轮讨价还价,参与者 1 可以接受也可以拒绝,然后两个参与者按这种方式继续轮流提出分配方案直至第 T 时期。如果第 T 时期的提议也被拒绝,那么该博弈最终未达成协议。

定义 16.10: 有限次轮流提议的讨价还价博弈

有限次轮流提议的讨价还价博弈是一个扩展博弈 $\langle \{1, 2\}, H, P, (\geq^i)_{i \in \{1, 2\}} \rangle$, 该博弈由以下几部分组成:

历史

历史集 H 包括(给定某个正整数 T):

- $\emptyset$ (初始历史);
- $(x_1, N, x_2, N, \dots, x_t)$, 其中, $x_1, \dots, x_t \in X$ 且 $1 \leq t \leq T$ [前 $(t-1)$ 时期的提议都被拒绝, 第 t 时期的提议是 x_t];
- $(x_1, N, x_2, N, \dots, x_t, N)$, 其中, $x_1, \dots, x_t \in X$ 且 $1 \leq t \leq T$ (前 t 时期的提议都被拒绝);
- $(x_1, N, x_2, N, \dots, x_{t-1}, N, x_t, Y)$, 其中, $x_1, \dots, x_t \in X$ 且 $1 \leq t \leq T$ [前 $(t-1)$ 时期的提议被拒绝, 第 t 时期的提议被接受]。

参与者函数

如果 τ 是奇数, 则设 $i_\tau = 1$; 如果 τ 是偶数, 则设 $i_\tau = 2$ 。那么:

- $P(\emptyset) = 1$ (参与者 1 先提议);
- $P(x_1, N, x_2, N, \dots, x_t) = i_{t+1}$, 其中 $t = 1, \dots, T$ (参与者 i_{t+1} 对参与者 i_t 的提议作出反应);
- $P(x_1, N, x_2, N, \dots, x_t, N) = i_{t+1}$, 其中 $t = 1, \dots, T-1$ [参与者 i_{t+1} 在第 $(t+1)$ 时期开始时提出提议]。

偏好

每个参与者 i 的偏好关系 $\geq^i$ 由收益函数 u_i 表示, 其中 $u^i(x_1, N, x_2, N, \dots, x_t, Y) = x_t^i$ 且 $u^i(x_1, N, x_2, N, \dots, x_T, N) = 0$ 。

接下来我们证明, 在这个博弈中, 在最后一个时期提出提议的参与者占有绝对优势: 在每个子博弈精炼均衡中, 最后一个时期提出提议的参与者得到全部金额。

命题 16.5: 有限次轮流提议博弈的子博弈精炼均衡

在有限次轮流提议博弈的每个子博弈精炼均衡中, 最后一个时期提出提议的参与者的收益是 1, 另一个参与者的收益是 0。

证明: 设参与者 i 是在第 T 时期提议的参与者, 参与者 j 是另一个参与者, 且 $e(i)$ 是参与者 i 得到全部金额的分配方案。该博弈有这样一个子博弈精炼均衡: 参与者 i 每次提议时都只提议 $e(i)$, 且仅接受另一人 $e(i)$ 的提议, 而参与者 j 总是提议 $e(i)$ 且接受参与者 i 的所有提议。

该博弈有许多子博弈精炼均衡, 但在所有子博弈精炼均衡中参与者 i 最终都会获得全部金额。令 s 为一个子博弈精炼均衡。考虑一个历史 $h = (x_1, N, x_2, N, \dots, x_{T-1}, N)$, 它表示 $(T-1)$ 个提议被提出且都被拒绝。由命题 16.4 的证明, 可得 $s^i(h) = e(i)$, 参与者 j 接受参与者 i 在第 T 时期所提议的任意一个分配方案。

如果参与者 i 在策略组合 s 的结果中并未得到全部金额, 那么他可以选择策

略 r^i ——拒绝任意一个时期的所有提议而总是提议 $e(i)$ 。策略组合 r^i 和 s^j 的结果是最晚在第 T 时期就分配方案 $e(i)$ 达成一致。

16.4.3 无限次单边提议

上一节中的结论证明了最后一个提出提议的时期非常重要。接下来,我们研究一个不存在最后期限的模型:参与者认为在拒绝一个提议之后,还有就其他提议达成一致的机会。我们假设只有参与者 1 提出分配方案。由于讨价还价的时期是无限的,我们将之前所学的扩展式博弈的模型稍作修改,将终点历史改成可以包括无限时期。

定义 16.11: 单方提议的无限时期的讨价还价模型

单方提议的无限时期的讨价还价模型,是扩展式博弈 $\langle \{1, 2\}, H, P, (\geq^i)_{i \in \{1, 2\}} \rangle$, 包含以下几部分:

历史

历史的集合包括:

- $\emptyset$ (空历史);
- $(x_1, N, x_2, N, \dots, x_{t-1}, N, x_t)$, 其中 $t \geq 1, x_1, \dots, x_t \in X$ [($t-1$) 个时期的提议都被拒绝, 参与者 1 在第 t 时期提出 x_t];
- $(x_1, N, x_2, N, \dots, x_t, N)$, 其中 $t \geq 1, x_1, \dots, x_t \in X$ (t 个时期的提议都被拒绝);
- $(x_1, N, x_2, N, \dots, x_{t-1}, N, x_t, Y)$, 其中 $t \geq 1, x_1, \dots, x_t \in X$ [($t-1$) 个时期的提议都被拒绝, 参与者 1 在第 t 时期的提议被接受];
- $(x_1, N, x_2, N, \dots, x_t, N, \dots)$ (所有的提议都被拒绝), 其中, 无限个提议为 $x_1, \dots, x_t, \dots$ 。

参与者函数

$P(\emptyset) = P(x_1, N, x_2, N, \dots, x_t, N) = 1$ 且 $P(x_1, N, x_2, N, \dots, x_t) = 2$ 。

偏好

每个参与者 i 的偏好关系 $\geq^i$ 可用收益函数 u^i 表示, 其中 $u^i(x_1, N, x_2, N, \dots, x_t, Y) = x_t^i$ 且 $u^i(x_1, N, x_2, N, \dots, x_t, N, \dots) = 0$ 。

在这个博弈中, 提出的每种分配方案都是子博弈精炼均衡的结果。事实上, 对于每种分配方案, 该博弈都有一个子博弈精炼均衡, 在这个均衡中, 这个分配方案一经提出, 马上被对方接受。因此, 如果历史是无限的, 只有参与者 1 报价这一事实, 并不会使参与者 1 的讨价还价能力比参与者 2 更强。

命题 16.6: 单方提议的无限时期的讨价还价博弈的子博弈精炼均衡

对于每种分配方案 $x_* \in X$, 仅有一方提议分配方案的无限时期讨价还价博弈有一个子博弈精炼均衡, 在这个均衡中, x_* 一被提出双方就达成一致。这个博弈

还有一个子博弈精炼均衡,在这个均衡中,双方从未就某一个分配方案达成一致。

证明:我们首先证明以下策略组合是一个子博弈精炼均衡:博弈双方在第1个时期就对 x_* 达成一致。

参与者1

总是提议按 x_* 分配。

参与者2

当且仅当 $y^2 \geq x_*^2$ 时,才会接受提议 y 。

在初始历史或任意一个以“拒绝”结束的历史之后,参与者1的理性决策是继续坚持其策略,因为参与者2不接受少于 x_*^2 的分配。在以提议 y (其中, $y^2 < x_*^2$)结束的历史之后,参与者2的理性决策是继续坚持其策略,因为在他拒绝这个提议之后,参与者1会继续提议 x_* 。在以提议 y (其中, $y^2 \geq x_*^2$)结束的历史后,参与者2应接受这个提议,因为随后参与者1提出的分配方案中,参与者2所得的收益不会高于 x_*^2 。因此,这个策略组合是一个子博弈精炼均衡。

接下来,我们证明以下策略组合是一个子博弈精炼均衡,在这个均衡中双方从未达成协议。

参与者1

在初始历史和所有的提议都为 $(1, 0)$ 的历史之后,参与者1提议 $(1, 0)$ 。在其他历史之后,参与者1提议 $(0, 1)$ 。

参与者2

在所有的提议都为 $(1, 0)$ 的历史之后,选择拒绝。在其他历史之后,如果提议为 $(0, 1)$,则选择接受。

我们首先来看参与者1。在每个历史之后,如果参与者1遵循其策略,结果要么是就 $(0, 1)$ 达成协议,要么是双方未达成协议,参与者1所得的收益都为0。在任意一个历史之后参与者1如果改变策略,结果仍是就 $(0, 1)$ 达成协议,或者是双方未达成协议,并未使参与者1获益更多。

我们再来看参与者2。如果参与者1提议 $(1, 0)$,参与者2遵循其策略,双方不可能达成协议。如果参与者2改变其策略,结果要么是就 $(1, 0)$ 达成协议,要么是双方未达成协议,不能使参与者2获益更多。如果参与者1提议 $(0, 1)$,那么参与者2遵循其策略,可达成其最喜欢的协议,即 $(0, 1)$ 。

博弈双方永不达成一致的这个均衡可以这样理解:首先,参与者2预计参与者1会坚持要求得到全部金额,参与者2打算拒绝这个提议。如果参与者1提出任何的分配方案,那么参与者2就认为这表明参与者1坚持得到全部金额的意愿不那么强烈了,他会期待参与者1选择妥协并把全部金额都让出来。参与者1本来只是想通过这样的尝试促使二人达成一个协议,让参与者2得到一个值为正的份额,但参与者2对参与者1的行为的错误理解,让参与者1不愿意继续他善意的行为。

16.4.4 有贴现的无限期单边提议

我们对上一小节的模型稍作修改,假设每个参与者都想尽早拿到自己的那份金额。具体来说,我们假设每个参与者 i 在终点历史的收益为 $(\delta^i)^t x^i$, 其中 $\delta^i \in (0, 1)$, 博弈双方在第 t 时期就 x 达成协议。

定义 16.12: 有贴现的无限次单边提议的讨价还价博弈

有贴现的无限次单边提议的讨价还价博弈与无限次单边提议的讨价还价博弈仅有一点不同: 如果博弈双方在第 t 时期就 x 达成协议, 则参与者 i 的收益为 $(\delta^i)^t x^i$, 其中 $i=1, 2$ 且 $\delta^i \in (0, 1)$ 。为了简化表达, 我们令 $\delta^1 = \alpha$, $\delta^2 = \beta$ 。

除非 $x_*^2 = 0$, 否则命题 16.6 的证明中的第一个策略组合 (参与者 1 总是提议 x_* , 当且仅当 $y^2 \geq x_*^2$ 时, 参与者 2 才会接受提议 y) 不是这个博弈的子博弈精炼均衡。如果 $x_*^2 > 0$, 参与者 1 提议 $(x_*^1 + \epsilon, x_*^2 - \epsilon)$, 其中 $\epsilon > 0$, 且 ϵ 足够小, 使得 $x_*^2 - \epsilon > \beta x_*^2$ 成立, 那么, 给定参与者 1 的策略, 参与者 2 如果按照策略拒绝这个提议, 在后面的时期才可得到 x_*^2 。但是, 对参与者 2 来说, 现在接受 $(x_*^2 - \epsilon)$ 比以后得到 x_*^2 更好。

接下来, 我们证明, 引入贴现因子对子博弈精炼均衡的集合的影响非常大: 哪怕参与者 2 的贴现因子接近于 1, 提出分配方案的参与者 1 在讨价还价中的优势会大大提高。

命题 16.7: 有贴现的无限次单边提议的讨价还价博弈的子博弈精炼均衡

对于贴现因子 α 和 β 的任意值, 有贴现的无限次单边提议的讨价还价博弈都只有一个子博弈精炼均衡, 在这个均衡中参与者 1 马上获得全部金额。

证明: 请注意, 参与者 1 总是提议 $(1, 0)$ 而参与者 2 选择全部接受这个策略组合, 是子博弈精炼均衡。

设所有子博弈精炼均衡中, 参与者 2 所得的收益的上确界为 M 。我们首先来考虑历史 (x) (参与者 1 提议 x)。如果参与者 2 拒绝 x , 则后续的博弈与整个博弈相同。因此, 在任意一个子博弈精炼均衡中, 如果参与者 2 选择拒绝, 最多让他在后面某个时期得到收益 M 。因此, 如果 $x^2 > \beta M$, 则在子博弈精炼均衡中参与者 2 选择接受 x 。所以, 在所有子博弈精炼均衡中, 参与者 1 的收益的下确界至少为 $(1 - \beta M)$ 。因此, 参与者 2 的收益的上确界 M 小于等于 βM , 而这个情况只有当 $M=0$ 时才成立 (给定 $\beta < 1$)。

于是, 在所有子博弈精炼均衡中参与者 2 的收益均为 0, 参与者 2 因此会接受所有提议 x (其中 $x^2 > 0$)。在所有子博弈精炼均衡中, 参与者 1 的收益为 1, 因为对于任意策略组合, 如果在这个组合中参与者 1 的收益 $u < 1$, 则其可以把提议改为 $(u + \epsilon, 1 - u - \epsilon)$ (其中, $\epsilon < 1 - u$), 参与者 2 也会选择接受。因此, 在任意一个子博弈精炼均衡中, 参与者 1 提议 $(1, 0)$, 参与者 2 接受这个提议。

16.4.5 有贴现的无限次轮流提议

在我们最后讨论的这个讨价还价博弈的模型中,时期是无限的,参与者轮流提议,在第1时期之后所得的收益需要贴现。

定义 16.13:有贴现的无限次轮流提议的讨价还价博弈

有贴现的无限次轮流提议的讨价还价博弈是一个扩展式博弈 $\langle \{1, 2\}, H, P, (\geq^i)_{i \in \{1, 2\}} \rangle$,它由以下几部分组成(其中,如果 t 是奇数, $i_t = 1$;如果 t 是偶数, $i_t = 2$):

历史

历史的集合包括

- $\emptyset$ (空历史);
- $(x_1, N, x_2, N, \dots, x_t)$, 其中, $x_1, \dots, x_t \in X, t \geq 1$ [($t-1$)个时期的提议都被拒绝,参与者在第 t 时期提出 x_t];
- $(x_1, N, x_2, N, \dots, x_t, N)$, 其中, $x_1, \dots, x_t \in X, t \geq 1$ (t 个时期的提议都被拒绝);
- $(x_1, N, x_2, N, \dots, x_{t-1}, N, x_t, Y)$, 其中, $x_1, \dots, x_t \in X, t \geq 1$ [($t-1$)个时期的提议都被拒绝,参与者在第 t 时期的提议被接受];
- $(x_1, N, x_2, N, \dots, x_t, N, \dots)$ (所有的提议都被拒绝), 其中, 无限个提议为 $x_1, \dots, x_t, \dots$ 。

参与者函数

参与者函数的定义如下:

- $P(\emptyset) = 1$ (参与者1首先提出提议);
- $P(x_1, N, x_2, N, \dots, x_t) = i_{t+1}, t \geq 1$ (参与者 i_{t+1} 对参与者 i_t 提出的分配方案作出回应);
- $P(x_1, N, x_2, N, \dots, x_t, N) = i_{t+1}, t \geq 1$ [参与者 i_{t+1} 在($t+1$)时期提出分配方案]。

偏好

每个参与者 i 的偏好关系 $\geq^i$ 可用收益函数 u^i 表示,其中,对 $t \geq 1$ 有 $u^i(x_1, N, x_2, N, \dots, x_t, Y) = (\delta^i)^t x_t^i$,对 $i = 1, 2$ 有 $u^i(x_1, N, x_2, N, \dots, x_t, N, \dots) = 0$,其中, $\delta^i \in (0, 1)$ 。为标记简洁起见,我们令 $\delta^1 = \alpha, \delta^2 = \beta$ 。

此时,参与者2享有提出分配方案的机会,就具备了与参与者1讨价还价的能力。接下来,我们证明这个博弈只有一个子博弈精炼均衡,在这个均衡中,两个参与者的收益取决于他们的贴现因子。

命题 16.8:有贴现的无限次轮流提议的讨价还价博弈的子博弈精炼均衡

有贴现的无限次轮流提议的讨价还价博弈中只有一个子博弈精炼均衡,在这个均衡中:

- 参与者 1 总是提议按 x_* 分配, 并且只在 $x^1 \geq y_*^1$ 时接受提议 x ;
- 参与者 2 总是提议按 y_* 分配, 并且只在 $y^2 \geq x_*^2$ 时接受提议 y 。

其中

$$x_* = \left(\frac{1-\beta}{1-\alpha\beta}, \frac{\beta(1-\alpha)}{1-\alpha\beta} \right)$$

$$y_* = \left(\frac{\alpha(1-\beta)}{1-\alpha\beta}, \frac{1-\alpha}{1-\alpha\beta} \right)$$

证明: 请注意, x_* 和 y_* 是方程 $\alpha x^1 = y^1$ 和 $\beta y^2 = x^2$ 的唯一解。

第一步 这个策略组合是一个子博弈精练均衡。

证明: 首先, 我们来考虑一个历史, 在这个历史之后参与者 1 作出提议。如果参与者 1 遵循这个均衡策略而提议 x_* , 参与者 2 会接受, 于是, 参与者 1 马上得到收益 x_*^1 。给定参与者 2 的策略, 参与者 1 可以选择改变其策略, 那么双方要么达成一致(参与者 1 在以后的某个时期获得一个不比 x_* 好的收益), 要么永远无法达成一致。因此, 对于参与者 1 来说, 不存在其他更优的策略。

接下来, 我们来考虑另一个历史, 在这个历史之后, 参与者 1 对提议 y 做出回应。

如果 $y^1 \geq y_*^1$, 参与者 1 会接受这个提议, 他马上得到收益 y^1 。如果参与者 1 改变其策略(拒绝这个提议), 则参与者 1 所得的收益不会比在至少晚一个时期后得到 x_* 更优。因此, 如果参与者 1 改变其策略, 最多可以获得收益为 $\alpha x_*^1 = y_*^1 \leq y^1$, 即改变策略不会使参与者 1 过得更好。

如果 $y^1 < y_*^1$, 参与者 1 会拒绝这个提议, 然后提议 x_* , 参与者 2 会选择接受, 于是, 在一个时期后参与者 1 获得收益 x_*^1 。参与者 1 改变其策略, 他要么选择接受当前的提议, 要么在至少一个时期后得到不高于 x_* 的收益。给定 $\alpha x_*^1 = y_*^1$, 参与者 1 接受当前这个提议是不划算的。

对参与者 2 的分析与之同理。

第二步 除这一策略组合外, 不存在另一个策略组合也是子博弈精练均衡。

证明: 在某一个历史之后参与者 i 提出提议, 设 G^i 是这—个历史之后的博弈。(所有这样的博弈都是一样的。) 设 M^i 是 G^i 的所有子博弈精练均衡中参与者 i 所得收益的上确界, 设 m^i 是 G^i 的所有子博弈精练均衡中参与者 i 所得收益的下确界。

首先, 我们要证明 $m^2 \geq 1 - \alpha M^1$ 。如果在博弈 G^2 中参与者 1 拒绝参与者 2 最初提出的提议, 则将进入到博弈 G^1 , 在这个博弈中参与者 1 获得的收益最多是 M^1 。因此, 在任意一个子博弈精练均衡中, 参与者 1 会接受收益高于 αM^1 的提议, 所以在博弈 G^2 的任意均衡中, 参与者 2 所得的收益至少为 $(1 - \alpha M^1)$ 。因此, $m^2 \geq 1 - \alpha M^1$ 。

接下来, 我们要证明 $M^1 \leq 1 - \beta m^2$ 。如果在博弈 G^1 中, 参与者 2 拒绝参与者 1 最初提出的提议, 则将进入到博弈 G^2 , 在这个博弈中参与者 2 获得的收益最多是

m^2 。因此,参与者2会拒绝收益少于 βm^2 的提议,所以,在博弈 G^1 中不存在子博弈精练均衡使得参与者1所得的收益高于 $(1-\beta m^2)$ 。因此, $M^1 \leq (1-\beta m^2)$ 。

由这两个不等式可得 $1-\alpha M^1 \leq m^2 \leq (1-M^1)/\beta$,因此有 $M^1 \leq (1-\beta)/(1-\alpha\beta) = x_*^1$ 。而由第一步可得 $M^1 \geq x_*^1$ 。因此,只能有 $M^1 = x_*^1$ 。同理可得 $m^2 = y_*^2$ 。

将参与者1和参与者2的顺序调换,重复以上证明,可得 $M^2 = y_*^2$ 和 $m^1 = x_*^1$,因此,在博弈 G^1 的任意一个子博弈精练均衡中,参与者1所得的收益为 x_*^1 ,在博弈 G^2 的任意一个子博弈精练均衡中,参与者2所得的收益为 y_*^2 。

在博弈 G^1 中,参与者2如果拒绝参与者1的提议,所得的收益最少是 $\beta y_*^2 = x_*^2$ 。因此,在博弈 G^1 的任意一个子博弈精练均衡中,参与者2的收益为 x_*^2 。当且仅当 x_* 一经提出就被接受时(即在博弈 G^1 的任意一个子博弈精练均衡中,参与者1提出 x_* 而参与者2接受这个提议),参与者1才有可能获得收益 x_*^1 ,参与者2才有可能获得收益 x_*^2 。同理,在博弈 G^2 的任意一个子博弈精练均衡中,参与者2提议 y_* ,参与者1接受这个提议。因此,命题16.8中给出的这个策略组合是这个博弈中唯一的子博弈精练均衡。■

请注意,如果某一个参与者更重视将来的收益,也就是说,他变得更有耐心,那么,给定另一个参与者的贴现因子,这个参与者所得的份额就会增大。如果他的贴现因子趋近于1,那么无论另一个参与者的贴现因子是多少,在均衡中他所得的份额都趋近于1。

如果两个参与者有同样的耐心(即贴现因子相等),即 $\alpha = \beta = \delta$,那么,均衡中参与者1所得的收益为 $1/(1+\delta)$,参与者2所得的收益为 $\delta/(1+\delta)$ 。因此,参与者1首先提出分配方案,这对他来说有利,但随着两个参与者变得越来越有耐心,这个优势变得就没那么明显了。如果 δ 趋近于1,均衡中两个参与者所得的收益都趋近于 $\frac{1}{2}$ 。也就是说,如果两个参与者有同样的耐心,且认为在将来获得的收益跟在现在获得的收益没区别,那么子博弈精炼均衡只有一个,在这个均衡中两个参与者所得收益趋近于 $\frac{1}{2}$ 。

在子博弈精炼均衡中,某一个分配方案一经提出就会被接受。课后习题第11题要求你分析另一个博弈,这个博弈的偏好与我们本节所讨论的有所不同:如果两人在第 t 时期就 x 达成协议,则参与者 i 的收益为 $(x^i - c^i t)$ [而不是 $(\delta^i)^t x^i]$,其中 $c^1 > 0$, $c^2 > 0$ 。如果 $c^1 \neq c^2$,这个博弈也只有一个子博弈精炼均衡,在这个均衡中,某一个分配方案一经提出就会被接受。课后习题第12题第(2)小题要求你证明,如果 $c^1 = c^2$,则这个博弈有一个子博弈精炼均衡,在这个均衡中,二人不会一开始就达成一致。

课后习题

1. 信任博弈。参与者1开始时有10美元,他需决定自留多少钱以及转给参与者2

多少钱,把他打算转给参与者 2 的钱乘以 3 即为参与者 2 实际得到的钱。然后,参与者 2 将会决定转多少钱给参与者 1。假设每个参与者仅对博弈结束时手中剩的钱感兴趣。

- (1) 请将这个情形表示为一个策略博弈,并确定这个博弈的子博弈精炼均衡。
 - (2) 这个博弈中是否存在一个不是子博弈精炼均衡的纳什均衡?
 - (3) 如果将这个过程重复三次,这个新的博弈的子博弈精炼均衡有哪些?
 2. 多个子博弈精炼均衡。请构造这样一个扩展式博弈:有两个参与者;存在两个子博弈精炼均衡,并且对两个参与者来说,其中一个均衡优于另一个均衡。
 3. 纳什均衡和子博弈精炼均衡。请构造这样一个扩展式博弈:有两个参与者;存在一个子博弈精炼均衡和一个纳什均衡;并且对两个参与者来说,子博弈精炼均衡优于纳什均衡。
 4. 比较静态分析。请构造两个扩展式博弈,这两个博弈仅有一点不同:一个参与者(假设为参与者 1)在某一个结果中的收益不同。这两个博弈都只有一个子博弈精炼均衡,并且当参与者 1 在某一博弈中的该结果收益更高时,他在该博弈的子博弈完美均衡中的实际收益反而更低。
 5. 拍卖。两个潜在买家竞拍一个价值为 12 美元的物品,并且这个物品是不可分割的。买家 1 有 9 美元,买家 2 有 6 美元。如果价格低于 3 美元,卖家拒绝出售。两个买家轮流出价,买家 1 先出价。所报价格必须是整数,并且不能超过 12 美元。买家就算没那么多钱,也可以往高了报价,但是如果他拍下该物品而没有足够的钱支付,就会被重罚,这对他来说是最糟糕的结果。如果其中一个买家不再加价,则拍卖结束,由另一个买家以其报价拍下这个物品。
 - (1) 请证明:在这个扩展式博弈的所有子博弈精炼均衡中,参与者 1 得到这个物品。
 - (2) 请证明:存在一个子博弈精炼均衡,在这个均衡中,这个物品以 3 美元售出。
 - (3) 请证明:存在一个子博弈精炼均衡,在这个均衡中,这个物品以 8 美元售出。
 6. 所罗门机制(Solomon's mechanism)。一个物品属于两人中的其中一人,每个人都声称这物品是自己的。这个物品对其主人来说价值为 H ,对另一人来说价值为 L ,且 $H > L > 0$ 。国王所罗门让这两个人进行以下这个博弈。随机设定这两个人为参与者 1 和参与者 2。参与者 1 首先宣布这个物品是“我的”还是“他的”,如果他说是“他的”,那么博弈结束,参与者 2 得到这个物品。如果他说是“我的”,接下来由参与者 2 表态:如果参与者 2 说是“他的”,那么参与者 1 得到这个物品;如果参与者 2 说是“我的”,那么参与者 2 得到这个物品,并且参与者 2 向所罗门国王支付 M (其中 $H > M > L$),参与者 1 则向国王所罗门支付很少的一笔钱 $\epsilon > 0$ 。
- 请解释一下,为什么这个博弈的结果总是物品的主人得到这个物品,并且不需要向国王付钱?
7. 交流。假设有 n 个人($n \geq 3$),他们住在不同的地方,这群人需要交流信息,参与

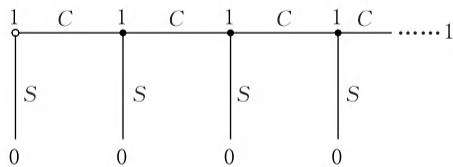
者 1 最先得知这个信息。假设只有当所有人都得知这个信息时, 这个信息对大家来说才是有用的。(这群人可能是一家亲戚, 而需交流的信息可能是家庭聚会的地点, 只有每个人都参加时这个家庭聚会才能算成功举办。) 当一个参与者收到信息时, 就得知了家庭聚会的地点, 然后他决定是否将这个信息传达给还不知道的人。如果每个人都收到了这个信息, 那么每个传达过信息的参与者都可以得到 $(1-c)$, 其中 $c \in (0, 1)$, 最后一个得知这个信息的参与者可以得到 1。如果有人没收到信息, 那么每个传达过信息的参与者的收益为 $-c$, 而每个未传达过信息的参与者的收益为 0。

(1) 如果 $n=3$, 请画出这个博弈的博弈树。

(2) 对于每个 n 值, 请描述这个博弈中所有子博弈精炼均衡的特点。

8. 赛跑。两个参与者(参与者 1 和参与者 2) 分别距离终点 A 步、 B 步。率先到达终点的参与者可以获得奖金 P (另一个参与者什么也得不到)。从参与者 1 开始, 两人轮流决定是否前进, 可以选择待在原地不动(成本为 0)、前进 1 步(成本为 2), 或者前进 2 步(成本为 4.5)。如果连续两轮两个参与者都决定待在原地不动, 则博弈结束(没人获得奖金)。每个参与者都追求净收益(奖金减去成本)最大。对于任意 A 、 B 、 P (其中 $6 \leq P \leq 8$), 请找出这个扩展式博弈中唯一的一个子博弈精炼均衡。

9. 单阶段偏离性质。如下图所示的博弈中, 历史是无限的, 并且只有一个参与者。在阶段 1, 2, $\dots$, 该参与者可以选择停止(S)或继续(C); 如果他选择 S 则博弈结束, 他的收益为 0; 如果他选择 C, 则又有一次机会可以选择 S; 如果他一直选择 C, 则收益为 1。请用这个博弈证明: 在这个无限时期的博弈中, 满足单阶段偏离性质的策略组合未必是子博弈精炼均衡。



10. 实施。两个邻居共同拥有一片草坪, 雇园丁修剪草坪需花费 100 美元, 两人就如何分摊这个费用无法达成一致, 假设你充当两人之间的调解人。雇佣园丁对邻居 i 的价值表示为 v^i 。每个邻居都知道 v^1 和 v^2 的值是多少。

你的目标是确保: 如果 $v^1 + v^2 > 100$, 则雇佣园丁; 如果 $v^1 + v^2 < 100$, 则不雇佣园丁。

你建议两人按以下方式博弈: 首先, 邻居 1 上报一个数。邻居 2 可以知道邻居 1 上报的数是多少, 然后也上报一个数。(这两个数都必须是非负数。) 如果这两个数之和小于 100, 则不雇佣园丁。如果这两个数之和大于 100, 则雇佣园丁, 并且每个人分担的费用都与其上报的数相等。

(1) 请证明, 对于任意 v^1 和 v^2 , 这个博弈的子博弈精炼均衡的结果是: 如果

$v^1 + v^2 > 100$, 则需雇佣园丁; 如果 $v^1 + v^2 < 100$, 则不雇佣园丁。

- (2) 如果改成让这两个邻居同时上报数字(也就是说任何一个人上报数字的时候都不知道另外一个人报的数是什么), 而雇佣园丁的条件不变, 请证明: 当 $100 < v^1 + v^2 < 200$ 且 v^1 和 v^2 都小于 100 时存在一个纳什均衡, 在这个纳什均衡中, 他们不雇佣园丁。
11. 有不变谈判成本的轮流提议。对有贴现的无限次轮流提议的讨价还价博弈稍作修改: 参与者 i 认为在第 t 时期收到的 x 的价值为 $(x - c^i t)$, 而不是 $(\delta^i)^t x$ 。(也就是说, 在双方达成协议之前的每个时期, 参与者 i 都需要承担一笔固定的成本 c^i 。)假设 $0 < c^1 < c^2$ 。请证明, 这个博弈只有一个子博弈精炼均衡, 并且在这个均衡中, 参与者 1 的收益为 1。
12. 有统一且不变谈判成本的轮流提议。对第 11 题的模型稍作修改: $c^1 = c^2 = c$ 。
- (1) 请证明: 参与者 1 所得的收益大于等于 c 的每种分配方案都是子博弈精炼均衡的结果。
- (2) 请证明: 如果 $c \leq \frac{1}{3}$, 那么这个博弈有一个子博弈精炼均衡, 在这个均衡中, 双方在第 1 时期未达成协议。

本章说明

扩展式博弈的概念由 von Neumann 和 Morgenstern(1944)提出; 我们所讨论的模型来自 Kuhn(1950, 1953)。子博弈精炼均衡的概念由 Selten(1965)提出。命题 16.3 由 Kuhn(1953)提出。

蜈蚣博弈(例 16.2)来自 Rosenthal(1981)。命题 16.8 由 Rubinstein(1982)提出。

第 6 题的博弈来自 Glazer 和 Ma(1989)。第 8 题的博弈由 Vijay Krishna 简化 Harris 和 Vickers(1985)中的模型后得到。

第四部分 其他主题

▶ 17

机制设计

本书第二部分和第三部分的模型都是在给定个人之间互动规则的前提下分析个体的行为。在本章,我们的分析方法与之前相反。也就是说,我们要找出能产生某些特定结果的一套个人之间互动的规则。这种类型的分析被称为“机制设计”(mechanism design)。这个领域涉及广泛,我们只通过一个简单的模型来展示一些基本思想。

17.1 公共项目的决策

由个人组成的社区经常要决定是否实施某个公共项目。例如,某城市的居民考虑是否要新建地铁,或是某社区的居民考虑是否要在其社区花园中新增一个长椅。这些决策行为具有公共性质,也就是说,社区里的所有人都会受这个决定的影响。社区可以决定实施该公共项目,也可以决定不实施。

定义 17.1: 公共项目问题

公共项目问题 $\langle N, D \rangle$ 包括个人的集合 $N = \{1, \dots, n\}$ 和公共决策的集合 $D = \{0, 1\}$ (其中,1表示实施该公共项目,0表示不实施该项目)。

个人对公共项目的态度可能不同:有的人可能会支持,有的人可能会反对。我们的目的是找出一种机制以平衡各方利益。这个机制能够要求个人付款或接受补贴,从而得到一个理想的结果。由于存在收付款,所以我们定义的个人偏好不应是对集合 D 的偏好,而应是对 (d, t) 的偏好,其中 d 是公共决策, t 是对个人的资金转移(正、负,或零)。

每个人 i 心中都有一个数值 v^i , v^i 可以是正值,也可以是负值。个人认为以下两个选择是无差异的:(1)不实施这个公共项目,个人不付钱也不得到补贴;(2)实施这个公共项目,个人支付 v^i (如果 $v^i > 0$)或得到 $-v^i$ (如果 $v^i < 0$)。因此,如果 $v^i > 0$,个人 i 会从这个公共项目中受益,且最多愿意支付 v^i 以实施这个项目;如果 $v^i < 0$,个人 i 会因这个公共项目受损,且最多愿意支付 $-v^i$ 来阻止这个项目实施;如果 $v^i = 0$,那么个人 i 认为这个公共项目实施与否都是无差异的。请注意,个人的利益仅取决于他对这个公共项目的价值的估计。

定义 17.2: 估值集

公共项目问题 $\langle N, D \rangle$ 的估值集 (Valuation profile) $(v^i)_{i \in N}$ 包括每个个人 $i \in N$ 对项目的个人价值的估值 v^i 。 v^i 决定个人 i 对 (d, t^i) 的偏好, 其中, (d, t^i) 包括公共决策 $d \in D$ 和数值 t^i , 即转给个人 i 的钱 (如果 $t^i > 0$), 或从个人 i 付出的钱 (如果 $t^i < 0$)。具体来说, 个人 $i \in N$ 对 (d, t^i) 的偏好可用以下效用函数表示, 其中 $d \in D, t^i \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} v^i + t^i, & \text{如果 } d=1 \\ t^i & , \text{如果 } d=0 \end{cases}$$

17.2 策略防范机制

假设每个人 i 的估值 v^i 只有他自己知道。所以, 如果社区想要以个人的估值为基础进行决策, 就需要询问个人的估值。有资金转移的直接机制 (a direct mechanism with transfers), 要求每个人上报一个数值 (金额), 并将这个数值作为其估值。然后, 这个机制根据人们上报的数值决定是否实施公共项目, 以及转给个人或者向个人收取的货币数量。

定义 17.3: 有资金转移的直接机制

对于公共项目问题 $\langle N, D \rangle$, 有资金转移的直接机制是一组函数 $(\delta, \tau^1, \dots, \tau^n)$, 在已知估值组合 $(x^1, \dots, x^n)$ (所有个人上报的数值) 时, 由这组函数确定对应的公共决策 $\delta(x^1, \dots, x^n) \in D$, 并确定给每个人 $i \in N$ 的资金转移数量 $\tau^i(x^1, \dots, x^n)$ 。

个人可以上报任意一个数值, 所以个人可能会假报其估值以从中受益, 我们需要考虑这个可能性。直观来看, 个人如果支持该项目, 可以假报一个比其估值还大的数, 从而受益; 如果反对该项目, 可以假报一个比其估值还小的数, 从而受益。如果无论个人的估值是多少, 每个人的最优行为都是如实上报其估值, 与其他人上报的数字无关, 那么我们就称该机制是策略防范机制 (strategy-proof mechanism)。也就是说, 给定任何其他个人上报的数值 (金额), 个人如实上报其估值对自己最有利。

定义 17.4: 策略防范机制

对于公共项目问题 $\langle N, D \rangle$, 如果对每一个估值组合 $(v^i)_{i \in N}$ 、每个人 $i \in N$ 、每组数 $(x^1, \dots, x^{i-1}, x^{i+1}, \dots, x^n)$ (除个人 i 之外的其他人上报的数值) 和每个数值 z^i (个人 i 上报的金额) 都有:

$$\begin{aligned} & \delta(x^1, \dots, v^i, \dots, x^n) v^i + \tau^i(x^1, \dots, v^i, \dots, x^n) \\ & \geq \delta(x^1, \dots, z^i, \dots, x^n) v^i + \tau^i(x^1, \dots, z^i, \dots, x^n), \end{aligned}$$

那么, 有资金转移的直接机制 $(\delta, \tau^1, \dots, \tau^n)$ 就是一个策略防范机制。

此时, 每个人的最优行为是如实上报其真实估值, 不管其他人上报的数值是

多少。

请注意,定义 17.4 并不要求如实上报估值是每个人的唯一的最优选择。

策略防范机制的例子之一,是“少数服从多数”规则。

例 17.1:“少数服从多数”规则

“少数服从多数”是一种直接机制。当且仅当大多数人上报的是正数的时候,公共项目才可以实施,且不要求资金转移,即:

$$\text{当且仅当 } |\{i \in N : x^i > 0\}| > n/2 \text{ 时, } \delta(x^1, \dots, x^n) = 1$$

且对所有个人 $i \in N$ 和估值组合 $(x^1, \dots, x^n)$, 有 $\tau^i(x^1, \dots, x^n) = 0$ 。

这个机制是一种策略防范机制。以一个估值为正的个人为例。假设他的真实估值是正数,随便上报一个哪怕与真实值不同的正数,对结果都没有影响。如果他上报一个负数,就可能会对结果产生影响,使一个原本可以实施的项目无法实施,这会使他过得更差。因此,无论其他人上报的数是多少,估值为正的个人的最优行为是如实上报其估值。同理可证,估值为负的个人的最优行为也是如实上报其估值。

虽然“少数服从多数”是一种策略防范机制,但是这个机制中做出决策所依据的条件有明显的缺陷:忽略了个人估值的大小。举个例子,如果少数人从该项目中获益巨大,而剩余的大多数人的生活因这个项目变差一点点,那么根据“少数服从多数”规则,这个项目就不会得以实施。

以下这个机制考虑了个人估值的大小:如果所有人上报的数值的总和为正,就实施这个项目。该机制下也不存在资金转移。但是,这个机制不是策略防范机制。

例 17.2:对个人上报的数值求和

在一个直接机制中,当且仅当所有人上报的数值的总和为正时,公共项目才可以实施,且不要求资金转移,即:

$$\text{当且仅当 } \sum_{j \in N} x^j > 0 \text{ 时, } \delta(x^1, \dots, x^n) = 1$$

且对所有个人 $i \in N$ 和估值组合 $(x^1, \dots, x^n)$, 有 $\tau^i(x^1, \dots, x^n) = 0$ 。

这个机制不是策略防范机制。以一个估值为正的个人为例。如果他如实上报其估值而所有人上报的总数为负,那么这个项目不会得以实施,此时,如果他作弊,上报一个足够大的数,这个项目就会得以实施,他会因此过得更好。

现在,我们讨论例 17.2 中机制的一个变体,这个机制在加入资金转移后,所得到的就是一种策略防范机制。

17.3 维克里-克拉克-格罗夫斯机制

维克里-克拉克-格罗夫斯(Vickrey-Clarke-Groves, VCG)机制是一种有资金

转移的直接机制,当且仅当个人上报的估值总数为正时,公共项目才可以实施。我们在这个机制中加入了资金转移,使这个机制具有策略防范性质:没有一个人会因假报其估值而获益。所有的资金转移都是非正数,也就是说,在某些情况下,个人需支付罚款。

假设在其他个人上报的数值给定的情况下,个人 i 上报的数值具有决定性作用:即在包含 i 上报的数值时,所有人上报的数值之和为正,项目被执行;但若没有 i 上报的数值,其余个人上报的数值之和为非正,项目将不会被执行。此时,在 VCG 机制下,个人 i 所需支付的货币转移金额,等于其他所有个人上报的数值之和。也就是说, i 因其导致项目被执行而受到惩罚,因为其他人上报的数值均表明该项目不应被执行。

现假设个人 i 上报的数值很关键,但作用与上一段相反:如果所有人都上报,这个项目不会被实施,但是,如果个人 i 未上报,这个项目就可以被实施了(个人 i 上报的数值是负数)。那么,个人 i 的资金转移是其他人所上报数值的总和的相反数:如果根据其他人上报的数值总和决策,结果是应该实施这个项目,那么个人 i 因其使这个项目未被实施而支付罚款。

只有当个人 i 上报的数值会对结果产生影响时,他才支付罚款。如果个人 i 上报的数值变了,只要这个改变不影响上报的数值总和的正负,个人 i 需支付的罚款就不变。如果个人 i 上报的数不会对结果产生影响,他就不必支付罚款。

定义 17.5: VCG 机制

对于公共项目问题 $\langle N, D \rangle$, VCG 机制是一种有资金转移的直接机制 $(\delta, \tau^1, \dots, \tau^n)$, 其定义为:

$$\text{当且仅当 } \sum_{j \in N} x^j > 0 \text{ 时, } \delta(x^1, \dots, x^n) = 1$$

且

$$\tau^i(x^1, \dots, x^n) = \begin{cases} \sum_{j \in N \setminus \{i\}} x^j, & \text{如果 } \sum_{j \in N \setminus \{i\}} x^j \leq 0 \text{ 且 } \sum_{j \in N} x^j > 0 \\ -\sum_{j \in N \setminus \{i\}} x^j, & \text{如果 } \sum_{j \in N \setminus \{i\}} x^j > 0 \text{ 且 } \sum_{j \in N} x^j \leq 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

请注意,对于某些上报数值的组合,该机制的运作者可以从相关个人那里收到一笔钱。可以证明,不存在一个策略防范机制,使得当上报数值的组合是任何可能的情况时,运作该机制的人收到的钱均为 0(详见课后习题第 1 题)。

下面代入具体的数字来说明 VCG 机制。

例 17.3: VCG 机制

在某一个公共项目问题中, $n=5$ 。下表显示了上报的数值组合分别是以下四种情况的时候,按照 VCG 机制做出的决定,以及对每个人的罚款。

x^1	x^2	x^3	x^4	x^5	δ	τ^1	τ^2	τ^3	τ^4	τ^5
5	-1	-1	-1	-1	1	-4	0	0	0	0
-5	1	1	1	1	0	-4	0	0	0	0
-7	1	1	3	4	1	0	0	0	-1	-2
-5	2	2	2	2	1	0	0	0	0	0

命题 17.1: VCG 机制是策略防范机制

对任意一个公共项目问题, VCG 机制都是策略防范机制。

证明: 设 $\langle N, D \rangle$ 是一个公共项目问题, $(\delta, \tau^1, \dots, \tau^n)$ 是这个问题的 VCG 机制, $(v^i)_{i \in N}$ 是一个估值组合。

考虑个人 $i \in N$, 他有 $v^i > 0$, 设 $(x^1, \dots, x^{i-1}, x^{i+1}, \dots, x^n)$ 是除个人 i 之外其他人所上报的数值, S 是其他人上报的数值的总和。

如果 $S > 0$, 那么, 如果个人 i 上报 v^i , 这个项目仍然可以得以实施 $[\delta(x^1, \dots, x^n) = 1]$, 个人 i 无需支付罚款 $[\tau^i(x^1, \dots, x^n) = 0]$ 。因此, 个人 i 的效用为 v^i , 这个结果对他来说是最优的。

如果 $-v^i < S \leq 0$, 那么, 如果个人 i 上报 v^i 或其他大于 $-S$ 的数, 这个项目则得以实施, 个人 i 需支付罚款 S , 其效用为 $S + v^i > 0$ 。相反, 如果个人 i 上报的数值小于或等于 $-S$, 则这个项目不被实施, 个人 i 无需支付罚款, 其效用为 0。

如果 $S \leq -v^i \leq 0$, 那么, 如果个人 i 上报 v^i 或其他任意一个小于等于 $-S$ 的数, 这个项目不会被实施, 个人 i 无需支付罚款, 并且其效用为 0。相反, 如果个人 i 上报的数大于 $-S$, 那么这个项目得以实施, 并且个人 i 需支付罚款 S , 其效用为 $v^i + S \leq 0$ 。

如果 $v^i \leq 0$, 同理可证。

综上所述: 给定其他人上报的数值组合和个人 i 的估值 v^i , 个人 i 如实上报 v^i 不会比他假报其他数值更差。

讨论

VCG 机制设定了如下规则: 当且仅当所有个人上报的估值的总和为正时, 公共项目才可以实施。这个机制很简单, 并且仅依赖于这个事实: 无论个人认为其他人上报的数值是多少, 如实上报自己的估值都是他最好的选择。然而, 这个机制存在以下几方面不足:

1. 即使这个项目不会实施, VCG 机制也可能会要求某些人支付罚款。例如, 估值集为 $(-5, 1, 1, 1, 1)$ 时, 不会实施这个项目, 但个人 1 需要支付 4。人们可能会觉得不实施项目还需要付钱是令人无法接受的。
2. VCG 机制不是那么浅显易懂的, 运行这个机制的过程中需要时间和经验去说服大家相信, 无论其他人上报的数是多少, 每个人如实上报都是最优决策。
3. 在这个机制下, 收到的罚款不会返还给个人。如果我们改变这个机制, 将最后收到的所有罚款都分给个人, 那么无论其他人上报的数值是多少, 个人上报其真

实估值就未必是最优选择了。举例来说,一个公共项目问题中有两个人,假设收到的所有罚款最终在这两人之间平分。假设 $v^1=1$, 个人 2 上报的数字为 10。如果个人 1 上报 1, 这个项目就会被实施, 那么个人 1 的效用为 1(无需罚款)。然而, 如果个人 1 上报 -8, 这个项目仍会被实施, 但此时个人 2 需支付 8, 最终有一半给了个人 1, 所以个人 1 的效用为 $1+4=5$ 。因此, 相对于如实上报其真实估值 1, 个人 1 上报 -8 是更好的决策。

4. 用估值总和的符号来决定是否实施一个公共项目未必是合理的, 尤其是在贫富差距很大的社会中。假设社会中有两个富人, 虽然他们从公共项目中获益较少, 但由于他们非常富有, 对这个项目的估值高达 100。而社会中的其他 99 个人虽然会因这个项目遭受重大损失, 但由于他们非常贫穷, 对这个项目的估值仅为 -1。在这种情况下, 所有人的估值总和为正, 尽管看起来不太公平, 但在 VCG 机制下, 这个项目仍会得以实施。更过分的是, VCG 机制不仅要求实施这个项目, 而且这两个富人无需支付罚款。他们仅凭为这个项目支付巨资的意愿, 就可以让这个项目得以实施。

课后习题

1. 平衡预算。如果不管所有上报的估值组合如何, 罚款总和总是为 0, 那么, 这个有资金转移的直接机制是平衡的。我们并未证明的一个结论表明: 根据一个有资金转移的、有策略防范性质的直接机制, 如果当且仅当估值总和为正时这个项目才可以被实施, 那么, 这个机制一定不是预算平衡的。为证明这个结论, 假设该公共项目问题中有两个人, 且每个人的估值是 4、-1 或者 -5。
 - (1) 假设每个人上报的数值只能是 4、-1 和 -5 中的一个, 请找出在各种上报的数值组合情况下 VCG 机制作用下的结果, 并证明这个机制是策略防范机制。
 - (2) 请证明不存在这样一个具有策略防范性且预算平衡的、有资金转移的直接机制: 当且仅当估值总和为正时这个项目才可以被实施; 并且资金转移具有对称性, 即当个人 1 报告 x 、个人 2 报告 y 时个人 1 的资金转移, 与当个人 2 报告 x 、个人 1 报告 y 时个人 2 的资金转移相同。
2. 维克里拍卖(Vickrey auction)。个人 1, $\dots$, n 竞拍一单位商品。每个人 i 对该商品的估值为非负数 v^i 。假设一个有资金转移的直接机制如下: 每个人给出一个非负报价; 最终获胜者(即报价最高的个人)将获得这一单位商品(如果有不止一个获胜者, 那么在所有给出最高报价的人中, 编号 i 最小的那个人将获得这一单位商品)。获胜者支付的价格等于除他之外的其他所有人中最高的报价。(因此, 如果报价各不相同, 则获胜者最终所支付的价格为第二高的报价。)获胜者的效用等于他对该商品的估值减去他支付的钱, 其他人的效用为 0。我们将这个机制称为第二价格拍卖: 在这个机制中, 个人提交报价, 且商品出售给报价最高

的人,此人只需支付第二高的报价(详见例 15.7)。

(1) 请证明这个机制是策略防范机制。

(2) 另一个有资金转移的直接机制与以上机制只有一点不同:获胜者支付的价格等于其报价。请解释一下为什么这个机制不是策略防范机制。

3. 有成本的公共项目。 n 个人决定是否实施一个成本为 C 的公共项目。如果实施该项目,每个人都需要平摊成本 $c=C/n$ 。决策结果 (α, t^i) 给个人 i 带来的效用为 $[\alpha(v^i - c) + t^i]$, 其中,如果该项目得以实施则 α 等于 1,如果该项目不被实施则 α 等于 0, t^i 是资金转移。

请针对这个情况设计一个类似于 VCG 的策略防范机制。

本章说明

VCG 机制背后的思想来自 Clarke(1971)和 Groves(1973),最早由 Vickrey(1961)提出。命题 17.1 由 Groves 和 Loeb(1975)提出。问题 2 中的拍卖问题最早由 Vickrey(1961)提出。

▶ 18

匹配

考虑以下问题。社会中有两种类型的人,某些人为类型 X ,而其他人为类型 Y 。每种类型的人都必须且只能与一个其他类型的人匹配。例如,经理必须与助手匹配,飞机驾驶员必须与副驾驶匹配。类型为 X 的每个人对类型为 Y 的所有人都有自己的偏好,类型为 Y 的每个人对类型为 X 的所有人也都有自己的偏好。相对于匹配不成功,每个人都更偏好与另一类型的人匹配上。我们希望找到一种给定任何偏好时都可以实现合理匹配的方法。

18.1 匹配问题

我们用 X 表示类型为 X 的所有人组成的集合,用 Y 表示类型为 Y 的所有人组成的集合,并且假设 X 和 Y 所含元素个数相同。任意 $x \in X$ 都对集合 Y 有一个偏好关系;任意 $y \in Y$ 都对集合 X 有一个偏好关系。我们假设所有的偏好都是严格的(没有一个人认为任意两个选项是无差异的)。

定义 18.1: 社会和偏好组合

一个社会 (X, Y) 包括(个人的)有限集合 X 和 Y ,其中, X 和 Y 所含元素个数相等。这个社会 (X, Y) 的偏好组合 $(\succsim^i)_{i \in X \cup Y}$,包括每个 $i \in X$ 对 Y 的严格偏好 $\succsim^i$,以及每个 $i \in Y$ 对 X 的严格偏好 $\succsim^i$ 。

一个匹配说明了每一对组合是如何形成的。该定义假设每个人都必须恰好与一个其他类型的人相匹配。

定义 18.2: 匹配

社会 (X, Y) 的一个匹配(matching)是一个从 X 到 Y 的一对一的函数。对于一个匹配 μ 和 $x \in X$,我们称 $(x, \mu(x))$ 是一对匹配(match)。

下面我们讨论几种匹配方法。匹配方法给每个偏好组合找到一个相应的匹配。也就是说,匹配方法为每个偏好组合设定谁和谁相匹配。

定义 18.3: 匹配方法

社会的匹配方法(matching method)是一个函数,它给社会中的每个偏好组合设定一个匹配。

在下面这个例子中,假定匹配的一方(Y)就像第8章模型中的房子一样,我们仅考虑X的偏好。

例 18.1:依次称霸

X中的所有人以事先定好的顺序依次选择Y中的人,这与之前讨论过的依次称霸程序相同。X中的每个人只能在Y中选择此前未被X中其他人选择的人。这个程序会产生一个匹配,因此被称为一个匹配方法。

下面再举两个匹配方法的例子。

例 18.2:偏好排序总和最小化

任意一对 (x, y) 包括X中的一个元素和Y中的一个元素,设 $n_x(y)$ 是y在x的偏好中的排序, $n_y(x)$ 是x在y的偏好中的排序。给每一对 (x, y) 赋值 $I(x, y) = \alpha(n_x(y), n_y(x))$,其中, α 是 $n_x(y)$ 和 $n_y(x)$ 的增函数(例如, $\alpha(n_1, n_2) = n_1 + n_2$)。 $\alpha(n_x(y), n_y(x))$ 可以用来衡量x和y对匹配不满意的程度。该匹配方法选出使所有 (x, y) 的 $I(x, y)$ 总和最小的那个匹配(如果总和最小的匹配不止一个,就选择其中之一)。

例 18.3:最优匹配的迭代筛选

首先,选择一对 (x, y) ,它的 $I(x, y)$ 的值(见例18.2中的定义)在所有 (x, y) 的 $I(x, y)$ 值中是最小的。然后,从X和Y中去掉这对x和y,在剩下的集合中选择使 $I(x, y)$ 的值最小的一对 (x, y) 。接下来,以同样的方式不断重复,直至所有人都完成配对。

18.2 盖尔-沙普利算法

下面我们学习一种看起来很有趣且有很好的性质的匹配方法。这个匹配方法的算法有两个版本:一个是X发起匹配;另一个是Y发起匹配。我们采用第一个版本。

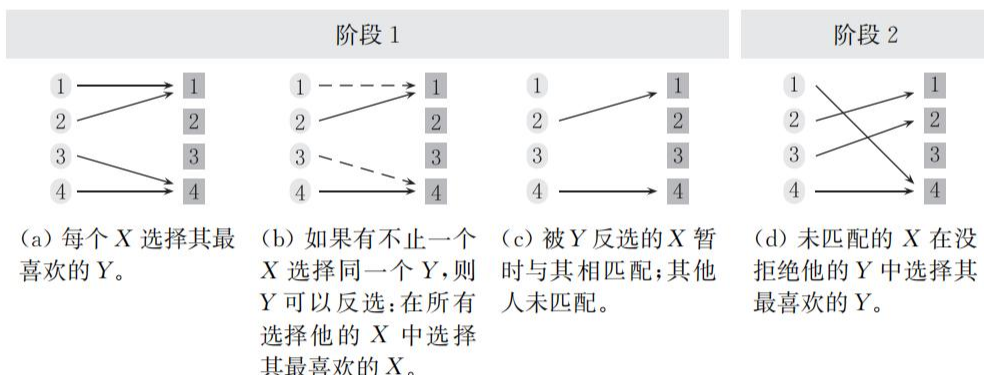


图 18.1 盖尔-沙普利匹配方法的例子

注:X用浅灰色背景标识,Y用深灰色背景标识。

这个算法分几个阶段进行,在每一阶段结束时,有几对人暂时匹配成功;在这个算法结束时,一直保持到最后的暂时配对就是最终的匹配结果。

阶段 1

每个 X 选择其最喜欢的 Y 。如果每个 Y 恰好只有一个 X 选择,那么这个算法结束,这个结果即是最终匹配结果。如果某些 Y 被不止一个 X 选择,那么这样的 Y 在所有选择他的 X 中选择其最喜欢的 X ,且与之暂时配对,并拒绝其他选择他的 X 。没被 Y 选择的 X 算是未匹配的。(图 18.1 所示即该算法阶段 1 的说明,1 和 2 最喜欢 1, 1 第二喜欢 4; 3 和 4 最喜欢 4, 3 第二喜欢 2;相对于 1, 1 更喜欢 2;相对于 4, 4 更喜欢 3。)

阶段 $(t+1)$, 其中 $t \geq 1$

在阶段 $(t+1)$ 开始时,有的人在阶段 t 已暂时匹配,有的人未匹配。每个未匹配的 X 在所有之前未曾拒绝过他的 Y 中选择其最喜欢的 Y 。其选择的有些 Y 可能已经暂时与其他 X 匹配(在图 18.1 的例子中,阶段 2 的 4 就是这样的情况)。每个 Y 从阶段 t 与其暂时匹配的 X 和在阶段 $(t+1)$ 选择他的未匹配的 X 中选择其最喜欢的 X ,新产生一个暂时的匹配。

结束规则

如果每个 X 都与一个 Y 暂时匹配,那么这个算法结束,这些暂时的匹配即为最后的匹配结果。

下面正式给出这个算法的定义,但如果上面的内容你已经看懂了,就可以跳过下面这个正式的定义。

程序:盖尔-沙普利算法

给定社会 (X, Y) , 在 (X, Y) 的盖尔-沙普利算法(Gale-Shapley algorithm)中,如果是 X 发起匹配,我们称其为 GS^X 。给定对 (X, Y) 的偏好组合 $(\succsim^i)_{i \in X \cup Y}$, 它生成一个序列 $(g_t, R_t)_{t=0, 1, \dots}$, 其中

- $g_t: X \rightarrow Y \cup \{\text{未匹配的人}\}$ 是一个函数,使得不存在两个 X 和同一个 Y 相匹配的情况。
- R_t 是一个从 X 到 Y 的子集的函数。

一对 (g_t, R_t) 是阶段 t 结束时算法的状态。如果 $g_t(x) \in Y$, 那么 $g_t(x)$ 是与 x 暂时匹配的 y , $R_t(x)$ 是在阶段 t 所有拒绝 x 的 y 的集合。

(g_0, R_0) 的定义

每个 x 都是未匹配的,每个集合 $R_0(x)$ 都是空集:

对所有 $x \in X$, $g_0(x) = \text{未匹配}$

对所有 $x \in X$, $R_0(x) = \emptyset$

给定 (g_t, R_t) 时 (g_{t+1}, R_{t+1}) 的定义

对于每个 $y \in Y$, 设:

$A_{t+1}(y) = \{x \in X: y \text{ 在 } Y \setminus R_t(x) \text{ 中根据 } \succsim^y \text{ 是最优的}\}$

也就是说, $A_{t+1}(y)$ 是在阶段 $(t+1)$ 选择 y 的 x 的集合。(请注意, 如果 $g_t(x) = y$ 则 $x \in A_{t+1}(y)$ 。)此时有:

$$g_{t+1}(x) = \begin{cases} y & , \text{如果根据 } \succsim^y, x \text{ 在 } A_{t+1}(y) \text{ 是最优的} \\ \text{未匹配} & , \text{其他} \end{cases}$$

并且

$$R_{t+1}(x) = \begin{cases} R_t(x) & , \text{如果 } g_{t+1}(x) \in Y \\ R_t(x) \cup \{y \in Y; x \in A_{t+1}(y)\} & , \text{如果 } g_{t+1}(x) = \text{未匹配} \end{cases}$$

因此, $R_{t+1}(x)$ 等于 $R_t(x)$, 除非 x 在阶段 t 被某个 $y \in Y$ 拒绝, 在这种情况下, y (且只有 y) 被加入集合 $R_t(x)$ 。

停止规则

如果对于所有 $x \in X$ 有 $g_T(x) \in Y$, 那么这个算法在阶段 T 停下。

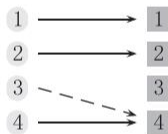
对该算法的描述讲的是个人选择匹配的问题。但是, 不应该从字面上理解这个算法。我们这样描述只是为了让它显得有意思(就像描述依次称霸程序一样)。实际上, 盖尔-沙普利算法仅定义了一个函数: 为每个偏好组合确定一个匹配。稍后我们会证明该算法最终总能得到一个匹配, 但在这之前我们先举个例子。

例 18.4 假设社会中有 4 个 X 和 4 个 Y , 偏好组合如下所示, 其中, 每个 X 用浅灰色背景标识, 每个 Y 用深灰色背景标识。

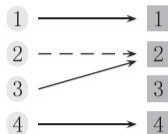
1:	1 > 4 > 2 > 3	1:	3 > 1 > 2 > 4
2:	2 > 3 > 1 > 4	2:	3 > 2 > 4 > 1
3:	4 > 2 > 3 > 1	3:	4 > 3 > 2 > 1
4:	4 > 3 > 1 > 2	4:	1 > 4 > 3 > 2

X 发起匹配。我们首先对这个偏好组合应用 GS^X (由 X 发起匹配)。

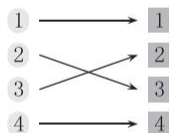
阶段 1: 1 选择 1, 2 选择 2, 3 和 4 都选择 4。4 相对于 3 更偏好 4, 他因此拒绝 3 而选择 4。也就是说, $g_1(1) = 1, g_1(2) = 2, g_1(3) = \text{未匹配}, g_1(4) = 4, R_1(1) = \emptyset, R_1(2) = \emptyset, R_1(3) = \{4\}, R_1(4) = \emptyset$ 。



阶段 2: 3 选择 2, 2 暂时和 2 匹配。2 相对于 2 更偏好 3, 他因此拒绝 2。也就是说, $g_2(1) = 1, g_2(2) = \text{未匹配}, g_2(3) = 2, g_2(4) = 1 = 4, R_2(1) = \emptyset, R_2(2) = \{2\}, R_2(3) = \{4\}, R_2(4) = \emptyset$ 。

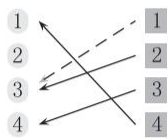


阶段 3: 2 选择 3。每个 Y 都和唯一的一个 X 相匹配, 这个算法停止。我们有 $g_3(1)=1, g_3(2)=3, g_3(3)=2, g_3(4)=4$ 。

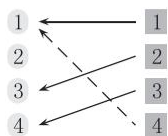


Y 发起匹配。下面对这个偏好组合应用 GS^Y 。

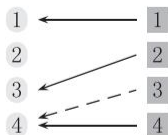
阶段 1: 1 和 2 选择 3, 3 选择 4, 4 选择 1。3 相对于 1 更偏好 2, 他因此拒绝 1。



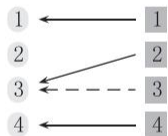
阶段 2: 1 选择 1, 1 相对于 4 更偏好 1, 故拒绝 4。



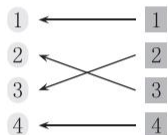
阶段 3: 4 选择 4, 4 相对于 3 更偏好 4, 故拒绝 3。



阶段 4: 3 选择 2, 3 相对于 3 更偏好 2, 故拒绝 3。



阶段 5: 3 选择 2。每个 X 都与唯一一个 Y 相匹配, 这个算法停止。



请注意, 在例 18.4 中的两个匹配相同。但不要妄下结论, 因为对许多偏好组合来说, 由 GS^X 产生的匹配和由 GS^Y 产生的匹配不同。

接下来我们要证明,对每个偏好组合来说,这个算法都是适用的,最终会产生一个匹配。

命题 18.1: 盖尔-沙普利算法产生一个匹配

对任意一个社会 and 该社会中的任意一个偏好组合来说,盖尔-沙普利算法都是适用的,最终会产生一个匹配。

证明:我们只证明算法 GS^X (X 发起匹配)。对 GS^Y 的证明与之类似。

首先,我们要证明这个算法是定义明确的。也就是说,我们认为不存在一个偏好组合,使得在 GS^X 算法的某一个阶段 t 中, $x \in X$ 被所有 Y 拒绝(也就是说, $R_t(x) = Y$)。请注意,如果 Y 拒绝 X ,他一定是与另一个 X 暂时匹配上了。因此,如果某一个 $x \in X$ 在阶段 t 后被每个 Y 都拒绝过,那么每个 Y 都暂时与一个 X 相匹配。但 X 和 Y 中人数相等,所以 X 一定暂时与某个 Y 相匹配[也就是说, $g_t(x) \in Y$],他没有被 $g_t(x)$ 拒绝。前后存在矛盾。

现在,我们证明这个算法一定会结束。在每一阶段如果算法继续,则至少有一个 X 被拒绝。因此如果算法不结束,到某一阶段时某个 X 一定会被所有 Y 拒绝,而上一段中我们证明了这是不可能的。

最后,如果所有 X 都与 Y 相匹配,则这个算法结束,这个结果就是一个匹配。

18.3 盖尔-沙普利算法和稳定性

现在,我们讨论由盖尔-沙普利算法产生的匹配的性质。如果存在两个人,相对于他们目前相匹配的人,他们更偏好跟彼此匹配,那么,我们认为这个匹配是不稳定的。也就是说,对与某个 $x \in X$ 和 $y \in Y$ 来说, $y \succ \mu(x)$, x 相对于 $\mu^{-1}(y)$ (即现与 y 相匹配的 x) 更偏好 y , y 相对于 $\mu^{-1}(y)$ (即现与 y 相匹配的 x) 更偏好 x 。在这种情况下 x 和 y 都不想接受 μ 的匹配,而更偏好与彼此匹配。如果不存在这样的两个人,则这个匹配是稳定的。

定义 18.4: 稳定的匹配

对于社会 (X, Y) 和偏好组合 $(\succsim^i)_{i \in X \cup Y}$, 如果不存在 $(x, y) \in X \times Y$ 满足 $y \succ^x \mu(x)$ 且 $x \succ^y \mu^{-1}(y)$, 则匹配 μ 是稳定的。

为说明稳定匹配的概念,我们来举例证明:依次称霸算法,即每个 x 依次选择在这之前未被选择的 y ,可能会产生一个不稳定的匹配。

例 18.5

社会 $(\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 3\})$ 的偏好如下所示:

1:	1 > 2 > 3	1:	2 > 3 > 1
2:	1 > 2 > 3	2:	3 > 2 > 1
3:	1 > 2 > 3	3:	1 > 3 > 2

应用依次称霸算法, X 按 1、2、3 的顺序依次选择 Y 。这个算法产生的匹配

中, $i \in X$ 与 $i \in Y$ 相匹配 ($i=1, 2, 3$)。但这个匹配是不稳定的, 因为 $2 \in X$ 和 $1 \in Y$ 相对于他们目前匹配的人, 更偏好与彼此相匹配。

现在, 我们证明盖尔-沙普利算法会产生一个稳定的匹配。

命题 18.2: 盖尔-沙普利算法会产生一个稳定的匹配

对于任意一个社会 and 该社会中的任意一个偏好组合来说, 盖尔-沙普利算法可以产生一个稳定的匹配。

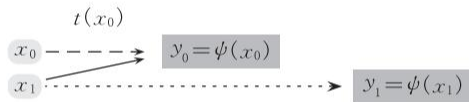
证明: 考虑一个社会 (X, Y) , 偏好组合为 $(\geq^i)_{i \in X \cup Y}$ 。用 μ 表示 GS^X 产生的匹配。假设对 $x \in X$ 和 $y \in Y$ 来说, x 相对于 $\mu(x)$ 更偏好 y ($y \succ^x \mu(x)$)。那么, 在 x 选择 $\mu(x)$ 之前一定曾选择过 y , 并且由于 y 更偏好另一个 X 而被 y 拒绝。随后, y 因为更偏好另一个 X 则拒绝这个 x 。因此, y 相对于 x 更偏好 $\mu^{-1}(y)$ (即最终与 y 相匹配的那个 X)。我们可以得出结论: 不存在两个人相对于 μ 更偏好与彼此相匹配, 所以 μ 是稳定的。

可能许多匹配都是稳定的。 GS^X 算法产生一个稳定的匹配, GS^Y 产生另一个稳定的匹配, 这两个匹配可能相同也可能不同。由某一方发起匹配比另一方发起匹配更好吗? 对某一个 X 来说, 是否存在一个稳定的匹配比 GS^X 产生的匹配更好? 接下来的命题回答了这两个问题: 对任意 $x \in X$, GS^X 产生的匹配对 x 来说至少和其他任意一个稳定的匹配一样好, 特别地, GS^X 产生的匹配对 x 来说至少和 GS^Y 产生的匹配一样好。

命题 18.3: GS^X 算法产生一个对 X 来说最优的稳定匹配

对任意一个社会 and 该社会的任意一个偏好组合来说, 不存在稳定的匹配对任意一个 X 来说优于 GS^X 产生的匹配。

证明: 社会为 (X, Y) , 偏好组合为 $(\geq^i)_{i \in X \cup Y}$, 设 μ 是 GS^X 产生的 (稳定) 匹配, ϕ 是另一个稳定匹配, 且对某些 $x \in X$ 来说有 $\phi(x) \succ^x \mu(x)$ 。设 X^* 是所有满足 $\phi(x) \succ^x \mu(x)$ 的 $x \in X$ 的集合。对于每个 $x \in X^*$, $t(x)$ 表示 GS^X 算法中在哪个阶段 x 选择了 $\phi(x)$ 且被拒绝。假设 $x_0 \in X^*$ 是在所有 $x \in X^*$ 中使 $t(x)$ 最小的。令 $y_0 = \phi(x_0)$, $x_1 \in X$ 是在 GS^X 算法中 y_0 拒绝 x_0 时所选择的个人。也就是说, 在阶段 $t(x_0)$, 个人 x_0 和 x_1 都选择 y_0 , y_0 拒绝 x_0 而选择了 x_1 (即 $x_1 \succ^{y_0} x_0$)。令 $\phi(x_1) = y_1$ 。



如果 $y_0 \succ^{x_1} y_1$, 则 (x_1, y_0) 中的两个人更偏好与彼此相匹配, 而不是与 ϕ 分配的个人匹配, 这与 ϕ 的稳定性相矛盾。因此, $y_1 \succ^{x_1} y_0$ 。但如果这样的话, 在 GS^X 算法中, x_1 必须选择 y_1 , 且在阶段 $t(x_0)$ 之前被拒绝, 可得 $t(x_1) < t(x_0)$, 这与 $t(x_0)$ 最小矛盾。

我们接下来用下述观察对命题 18.3 的结论进行补充: 对每个 Y 来说, 没有一个稳定的匹配比 GS^X 产生的匹配更差。

命题 18.4: GS^X 算法产生一个对 Y 来说最差的稳定匹配

对于任意一个社会和该社会的任意一个偏好组合,不存在稳定的匹配对任意一个 Y 来说比 GS^X 产生的匹配更差。

证明: 社会为 (X, Y) , 给定偏好组合 $(\succsim^i)_{i \in X \cup Y}$, 算法 GS^X 产生一个(稳定的)匹配 μ 。假设对某些 $y \in Y$ 来说, 另一个稳定匹配 ψ 比 μ 更差: $x_2 = \psi^{-1}(y) <^y \mu^{-1}(y) = x_1$ 。令 $y_1 = \psi(x_1)$ 。有:

$$\begin{array}{ccc} \mu & & \psi \\ y \leftrightarrow x_1 & y \leftrightarrow x_2 & \\ & y_1 \leftrightarrow x_1 & \end{array}$$

由命题 18.3 可得, $y = \mu(x_1) \succ^{x_1} \psi(x_1) = y_1$ 。因此给定 $x_1 \succ^y \psi^{-1}(y) = x_2$, x_1 和 y 相对于 ψ 中匹配的人更偏好与彼此相匹配, 这与 ψ 是稳定的这个假设相矛盾。

课后习题

1. 稳定的匹配和帕累托稳定。

(1) 请证明任意一个稳定的匹配是帕累托稳定的。也就是说, 不存在一个偏好组合, 使得另一个匹配(可能稳定, 也可能不稳定)对一个人来说更好, 而对其他人来说至少一样好。

(2) 帕累托稳定的匹配可能不是稳定的。请举例说明。

2. 所有 X 的偏好相同。假设所有 X 对 Y 的偏好相同。

(1) GS^X 算法被分成了几个阶段执行?

(2) 哪个依次称霸程序产生的最终匹配和 GS^X 产生的最终匹配相同?

(3) 请证明: 在这种情况下, GS^X 和 GS^Y 产生的匹配相同。

3. 社团。假设将 $3n$ 个学生分给三个项目, 每个项目需要 n 个学生。每个学生对项目有严格的偏好, 且每个项目对学生也有严格的偏好。试定义一个类似于盖尔-沙普利算法的算法, 给稳定性下定义, 并证明对任意一个偏好组合来说这个算法最终会产生一个稳定的匹配。

4. 作弊。盖尔-沙普利算法不具有策略防范性, 因此不能避免作弊的问题。具体而言, 如果要求每个人报告其偏好, 并使用所报告的偏好运行 GS^X 算法, 那么对于某些偏好组合, 某些个人会发现: 根据其真实偏好, 当他报告的偏好与其真实偏好不同时, 反而能获得更优的结果。

接下来我们看看, 社会中有三个 X 和三个 Y , 他们的偏好组合如下:

$$\begin{array}{ll} 1: & 1 > 2 > 3 & 1: & 2 > 1 > 3 \\ 2: & 2 > 1 > 3 & 2: & 1 > 2 > 3 \\ 3: & 1 > 2 > 3 & 3: & 1 > 2 > 3 \end{array}$$

请证明:如果个人 1 不上报其真实偏好,他会因此受益。

5. 舍友问题。社会中有 $2n$ 个人。所有个人必须两两配对。每个人对其他人都有一个(严格)偏好。分配 μ 是从个人的集合到该集合本身的一对一的函数,使得:如果 $\mu(i)=j$, 则 $\mu(j)=i$ 。如果不存在这样一个配对,使得配对中的两人相对于其分得的伙伴更偏好其他人,那么这个分配就是稳定的。举一个偏好组合的例子(假设社会中有 4 个人):给定这个偏好组合,社会中不存在稳定的分配。

本章说明

本章的内容以 Gale 和 Shapley(1962)为基础。

► 19

理想社会经济制度

假设社会中每个人都用单一的生产要素(如土地)生产同样的消费性商品(如食物)。每个人由其生产效率刻画。个人的生产效率越高,在给定任意一个数量的投入时,他生产出的商品就越多。

我们可以认为经济制度是一个规则,这个规则指出了人们的生产效率如何决定整个社会生产出的商品总量,以及这些商品在个人之间的配置。生产效率高的人应该比生产效率低的人获得更多的商品吗?生产效率相同的两个人得到的商品应该一样多吗?个人的生产效率提高后应该得到更多的商品吗?经济制度的设计需要回答这些问题。

本章所采用的方法(与第3章和第20章的方法相似)是不证自明的。本章中最核心的命题指出了实现效率和公平所需的条件,只有理想社会的经济制度才能满足这些条件。

19.1 模型

假设社会中有 n 个人(表示为 $1, \dots, n$)。我们把固定数量的某一商品(如土地)作为投入品,投入品在个人之间分配。为方便起见,我们设投入品的总量为 1。每个人都用所分得的投入品生产商品,我们称生产的商品为财富。每个人 i 都有生产效率 $\lambda^i \geq 0$; 使用 α^i 单位的投入品,个人 i 能生产出数量为 $\alpha^i \lambda^i$ 的财富。

定义 19.1: 社会和生产能力组合

一个社会(society)包括个人的集合 $N = \{1, \dots, n\}$ 和可用于生产的投入品的总量(假设为 1)。

生产效率组合(productivity profile)是一组非负数的向量 $(\lambda^1, \dots, \lambda^n)$ 。对任意一个非负数 α^i , 个人 i 将 α^i 单位的投入品转化为 $\alpha^i \lambda^i$ 单位的财富。

投入品的分配由非负数向量 $(\alpha^1, \dots, \alpha^n)$ 表示,且和为 1: $\sum_{i=1}^n \alpha^i = 1$ 。如果个人 i 分得的投入品的数量为 α^i , 那么社会生产的总财富为 $\sum_{i=1}^n \alpha^i \lambda^i$, 且生产出的所有产品最终必须分配给个人。

定义 19.2: 可行的财富组合

给定任意一个生产效率组合 $(\lambda^1, \dots, \lambda^n)$, 如果对某些非负数的组合 $(\alpha^1, \dots, \alpha^n)$, 有 $\sum_{i=1}^n \omega^i = \sum_{i=1}^n \alpha^i \lambda^i$ (其中, $\sum_{i=1}^n \alpha^i = 1$), 那么非负数的组合 $(\omega^1, \dots, \omega^n)$ 是可行的财富组合(feasible wealth profile)。

在我们所建的模型中, 经济制度即一个规则, 这个规则给每个生产效率组合设定一个可行的财富组合。请注意, 经济制度的定义并未明确规定每个人生产多少商品; 即使投入品在人们之间的分配不同, 也可能会产生相同的财富组合。

定义 19.3: 经济制度

经济制度(economic system)是一个函数 F , 它给每个生产效率组合 $(\lambda^1, \dots, \lambda^n)$ 分配一个可行的财富组合 $F(\lambda^1, \dots, \lambda^n)$ 。

如果 $F(\lambda^1, \dots, \lambda^n) = (\omega^1, \dots, \omega^n)$, 那么, 给定生产效率组合 $(\lambda^1, \dots, \lambda^n)$, 根据规则 F 分配给个人 i 的财富为 $F^i(\lambda^1, \dots, \lambda^n) = \omega^i$ 。请注意, 一个经济制度就是一个规则, 这个规则说明: 对于任意一个可能的生产效率组合(而不是对于某一个生产效率组合), 财富是如何分配的。

投入品的分配能决定整个社会产出的总财富。将所有投入品都分给生产效率最高的人们, 生产出的财富就是最多的。(如果每个人的生产效率都不同, 则将所有投入品都分配给生产效率最高的那个人。)将投入品在所有人之间平均分配通常是非常低效的。

财富分配的一个备选方案, 是所有人都得到自己生产的财富。在另一个极端, 所有人都平分生产出的所有财富。将这里分配财富的规则和上一段提到的分配投入品的规则结合起来, 可以归纳出以下四种经济制度。

例 19.1: 平分投入品且无再分配

将投入品在个人间平均分配, 每个人都得到自己生产出来的财富。也就是说, 给定任意一个生产效率组合 $(\lambda^1, \dots, \lambda^n)$, 个人 i 分得的财富为 $F^i(\lambda^1, \dots, \lambda^n) = \lambda^i/n$ 。

例 19.2: 投入品分给生产效率最高的人且无再分配

将投入品在生产效率最高的个人之间平分, 每个人都得到其生产的财富。也就是说, 给定任意一个生产效率组合 $(\lambda^1, \dots, \lambda^n)$, 我们有:

$$F^i(\lambda^1, \dots, \lambda^n) = \begin{cases} \frac{\lambda^i}{|\{j \in N: \lambda^j \geq \lambda^k \text{ 对于所有 } k \in N\}|}, & \text{如果对于所有 } k \in N \text{ 有 } \lambda^i \geq \lambda^k \\ 0, & \text{其他情形} \end{cases}$$

例 19.3: 平分投入品且平分财富

将投入品在个人之间平均分配, 社会总财富也在个人之间平均分配。也就是说, 给定任意一个生产效率组合 $(\lambda^1, \dots, \lambda^n)$, 个人 i 分得的财富为 $F^i(\lambda^1, \dots, \lambda^n) = \sum_{j=1}^n \lambda^j / n^2$ 。

在不同的投入品分配规则和财富(产出)分配规则相组合形成的四种经济制度

中,最后一种经济制度是将投入品分给生产效率最高的人,并且将生产出的总财富在所有个人之间平均分配。这种经济制度就是共产主义原则“各尽所能,按需分配”(Marx, 1971, Section 1.3)在每个人的需求都相同的情况下的一种可能的形式化表述。

例 19.4:投入品分给生产效率最高的人且平分财富

将投入品在生产效率最高的人之间平均分配,财富在所有人之间平均分配。也就是说,给定任意一个生产能力组合 $(\lambda^1, \dots, \lambda^n)$,个人 i 分得的财富为 $F^i(\lambda^1, \dots, \lambda^n) = \max\{\lambda^1, \dots, \lambda^n\}/n$

除了以上四个,还有很多其他形式的经济制度,我们再举两个例子。

例 19.5:一个工人,一个受益者

对于个人 j_1 和 j_2 ,将所有的投入品分配给个人 j_1 ,且个人 j_2 得到所有的财富。也就是说,给定任意一个生产效率组合 $(\lambda^1, \dots, \lambda^n)$,我们有:

$$F^i(\lambda^1, \dots, \lambda^n) = \begin{cases} \lambda^{j_1}, & \text{如果 } i = j_2 \\ 0, & \text{其他情形} \end{cases}$$

这种经济制度反映了一种极端的权力关系:一个人是主人,一个人是奴隶。

例 19.6:投入品分给生产效率最高的人且根据生产效率分配财富

将投入品在生产效率最高的个人之间平均分配,社会中的每个人得到的财富与其生产效率成比例。也就是说,对于任意一个生产能力组合 $(\lambda^1, \dots, \lambda^n)$,个人 i 分得的财富为 $F^i(\lambda^1, \dots, \lambda^n) = \max\{\lambda^1, \dots, \lambda^n\} \lambda^i / \sum_{i=1}^n \lambda^i$ 。

19.2 经济制度的性质

接下来,我们讨论经济制度的几个性质。第一个性质与帕累托稳定性相似。

效率 一个经济制度是有效率的,如果对于每一个生产效率组合来说,在该制度所产生的财富组合之外,不存在任何其他可行的财富组合方案,能够在不使任何人状况变差的前提下,使某些人的状况变得更好。

定义 19.4:有效率的制度

如果对每个生产效率组合 $(\lambda^1, \dots, \lambda^n)$,不存在一个可行的财富组合 $(w^1, \dots, w^n)$,使得对于所有 $i = 1, \dots, n$,有 $w^i \geq F^i(\lambda^1, \dots, \lambda^n)$,且至少对于一个人有 $w^i > F^i(\lambda^1, \dots, \lambda^n)$,那么,经济制度 F 是有效率的。

当且仅当对于每个生产效率组合来说,经济制度分配给所有个人的财富总和与最多能生产出的财富总和相等,这个经济制度才是有效率的。只有将投入分配给那些生产效率最高的个人,生产出的总财富才可能是最多的,所以在 19.1 节的例子中,只有例 19.2、例 19.4 和例 19.6 中的经济制度是有效率的。

对称性 如果任意一个生产效率组合中两个生产效率相同的人分得的财富相等,那么,这个经济制度就是对称的。

定义 19.5: 对称的经济制度

对于任意个人 i 和个人 j 以及任意一个生产效率组合 $(\lambda^1, \dots, \lambda^n)$ 来说, 如果有:

$$\lambda^i = \lambda^j \Rightarrow F^i(\lambda^1, \dots, \lambda^n) = F^j(\lambda^1, \dots, \lambda^n)$$

那么, 这个经济制度 F 是对称的。

请注意, 在有的生产效率组合中每个人的生产效率都不相同, 在这类生产效率组合的情况下, 对称性对财富的分配不构成任何约束。在 19.1 节中, 除了例 19.5 (一个工人, 一个受益者) 以外的所有例子都满足这个性质。

相对单调性 当个人 i 的生产效率比个人 j 高时, 如果个人 i 分得的财富至少和 j 分得的财富一样多, 那么, 这个经济制度是相对单调的。

定义 19.6: 相对单调的经济制度

如果对任意一个生产效率组合 $(\lambda^1, \dots, \lambda^n)$, 有:

$$\lambda^i \geq \lambda^j \Rightarrow F^i(\lambda^1, \dots, \lambda^n) \geq F^j(\lambda^1, \dots, \lambda^n)$$

那么, 这个经济制度 F 是相对单调的。

在 19.1 节中, 除例 19.5 (一个工人, 一个受益者) 以外的所有例子都满足这个性质。

我们刚刚定义的三个性质(效率、对称性、相对单调性), 要求对于每一个生产效率组合, 经济制度分配的财富要满足某些特定的条件。接下来要讨论的三个性质有不同的逻辑结构: 当生产效率组合从一个变成另外一个时, 经济制度给出的两个财富分配结果之间的关系, 应该满足什么条件?

匿名性 如果经济制度不因个人名字的不同而区别对待, 则该制度是匿名的。(但匿名的经济制度仍可能根据生产效率来区别对待每个人。)个人的集合 N 的排列, 是一个从 N 到 N 的一对一的函数。举个例子, 个人集合 $N = \{1, 2, 3\}$ 有六种排列方式, 其中的一种排列方式为函数 $\sigma: \sigma(1)=3, \sigma(2)=2, \sigma(3)=1$ 。

考虑一种生产效率组合 $(\lambda^1, \dots, \lambda^n)$ 。给定 N 的排列方式 σ , 在个人按 σ 排列的生产效率组合中, 个人 i 的生产效率是 $(\lambda^1, \dots, \lambda^n)$ 中个人 $\sigma(i)$ 的生产效率。也就是说, 个人按 σ 排列的生产效率组合为 $(\lambda^{\sigma(1)}, \dots, \lambda^{\sigma(n)})$ 。匿名性的条件要求: 生产效率组合为 $(\lambda^{\sigma(1)}, \dots, \lambda^{\sigma(n)})$ 时个人 i 分得的财富与生产效率组合为 $(\lambda^1, \dots, \lambda^n)$ 时 $\sigma(i)$ 分得的财富相等, 即 $F^i(\lambda^{\sigma(1)}, \dots, \lambda^{\sigma(n)}) = F^{\sigma(i)}(\lambda^1, \dots, \lambda^n)$ 。

定义 19.7: 匿名的经济制度

如果对每个生产效率组合 $(\lambda^1, \dots, \lambda^n)$ 和 N 的任意一个排列方式 σ 来说, 对所有 $i=1, \dots, n$ 都有 $F^i(\lambda^{\sigma(1)}, \dots, \lambda^{\sigma(n)}) = F^{\sigma(i)}(\lambda^1, \dots, \lambda^n)$, 则这个经济制度 F 是匿名的。

在 19.1 节中, 除例 19.5 (一个工人, 一个受益者) 以外的所有例子都满足这个性质。

如果一个经济制度是匿名的, 那么这个经济制度也一定是对称的[课后习题第

1 题(1)]。但是,匿名性比对称性要求的条件更强。对称性仅要求:在一个生产效率组合中如果有些人的生产效率相等,经济制度应该让生产效率相等的人得到相同的财富。匿名性还要求:当两个生产效率组合只在个人排序方面不同时,经济制度所产生的对应的两个财富分配结果应该相同。举例来说,在一个社会中, $N = \{1, 2\}$,生产效率组合为 (λ^1, λ^2) ,有这样一个经济制度:如果 $\lambda^1 = \lambda^2$ 成立,则分配给个人 i 的财富为 $\frac{1}{2} \lambda^i$;如果 $\lambda^1 = \lambda^2$ 不成立,则分配给个人 1 的财富为 $\max\{\lambda^1, \lambda^2\}$,而分配给个人 2 的财富为 0(因为某种非生产效率的因素使个人 1 排名更靠前)。显然,这个经济制度是对称的,但不是匿名的。

对自身生产效率的单调性 如果某个人的生产效率提高,他分得的财富会不变或者随之增加,那么这个经济制度对个人自身的生产效率就是单调的。请注意,这个性质与相对单调性不同,相对单调性要求如果一个人的生产效率至少和另一个人的生产效率一样高,那么他得到的财富也至少和另一个人的财富一样多。

定义 19.8:对自身生产效率的单调性

如果对每个生产效率组合 $(\lambda^1, \dots, \lambda^n)$ 、每个人 i 和任何数值 $\Delta > 0$,都有 $F^i(\lambda^1, \dots, \lambda^i + \Delta, \dots, \lambda^n) \geq F^i(\lambda^1, \dots, \lambda^i, \dots, \lambda^n)$,那么这个经济制度 F 对每个人的自身的生产效率单调。

19.1 节中的所有例子都满足这个性质。如果一个经济制度是对称的且对自身生产效率单调,那么这个制度也是相对单调的[课后习题第 1 题(2)]。

对他人生产效率的单调性 如果某人生产效率的提高不会伤害其他人的利益,那么这个经济制度是对他人生产效率单调的。

定义 19.9:对他人生产效率的单调性

如果对每个生产效率组合 $(\lambda^1, \dots, \lambda^n)$ 、任意两个人 i 和 j 、任何数值 $\Delta > 0$,都有 $F^j(\lambda^1, \dots, \lambda^i + \Delta, \dots, \lambda^n) \geq F^j(\lambda^1, \dots, \lambda^i, \dots, \lambda^n)$,那么这个经济制度 F 对他人的生产效率单调。

在 19.1 节的例子中,除了例 19.2(投入品分给生产效率最高的人且无财富再分配)和例 19.6(投入品分给生产效率最高的人且按生产效率高低分配财富)以外的其他例子都满足这个性质。

19.3 理想社会的特点

命题 19.1:理想社会经济制度的特点

唯一一种有效率的、对称的、对自身生产效率单调、对他人生产效率单调的经济制度是理想社会。在理想社会中,财富由生产效率最高的那些个人生产,而生产出的所有财富在所有人之间平均分配。

证明:设 F 是满足这四个性质的经济制度。我们首先证明对每一个生产效率组合 $(\lambda^1, \dots, \lambda^n)$ 和个人 j , $F^j(\lambda^1, \dots, \lambda^n)$ 分配给个人 j 的财富最多有 M/n ,其

中 $M = \max\{\lambda^1, \dots, \lambda^n\}$ 。假设,与之相反,对于某个生产效率组合 $(\lambda^1, \dots, \lambda^n)$, 个人 i 分得的财富为 $F^i(\lambda^1, \dots, \lambda^n) > M/n$ 。显然,对每个人 j 都有 $M \geq \lambda^j$ 。 F 对其他人的生产效率单调,重复运用这个性质可得:

$$F^i(M, \dots, M, \lambda^i, M, \dots, M) \geq F^i(\lambda^1, \dots, \lambda^n)$$

由 F 对自身生产效率单调这个性质可得:

$$F^i(M, \dots, M) \geq F^i(\lambda^1, \dots, \lambda^n)$$

令 $F^i(M, \dots, M) = H$ 。由对称性可得,对每个人 j , 有 $F^j(M, \dots, M) = H$ 。因为 $F^i(\lambda^1, \dots, \lambda^n) > M/n$, 于是 $H > M/n$, 因此财富分配 $(H, \dots, H)$ 不是可行的。综上可知,个人 i 分得的财富 $F^i(\lambda^1, \dots, \lambda^n) \leq M/n$ 。

根据效率这个性质,将投入分给生产效率最高的人,因此对每个生产效率组合 $(\lambda^1, \dots, \lambda^n)$ 来说,都有 $\sum_{i=1}^n F^i(\lambda^1, \dots, \lambda^n) = M$, 并且每个人 i 分得的财富为 $F^i(\lambda^1, \dots, \lambda^n) = M/n$ 。

在本章最后,我们要证明这四个性质是相互独立的,即满足任意三个性质不意味着第四个性质的被满足。我们总找到得到这样的一种经济制度:满足其中的任意三个性质,但不满足余下的那个性质。因此,在这四个性质都被满足的情况下,才能得出命题 19.1 的结论。

命题 19.2: 性质的独立性

效率、对称性、对自身生产效率的单调性、对他人生产效率的单调性,这四个性质是相互独立的。也就是说,总能找到一种经济制度,它满足其中的任意三个性质,但不满足余下的那个性质。

证明:

效率

定义为 $F^i(\lambda^1, \dots, \lambda^n) = \min\{\lambda^1, \dots, \lambda^n\}/n$ 的经济制度满足除效率之外的其他三个性质。[对于任意一个非常数的生产效率组合 $(\lambda^1, \dots, \lambda^n)$, $(w, \dots, w)$ 是一个可行的财富组合,其中, $w = \max\{\lambda^1, \dots, \lambda^n\}/n$, 显然, $w > \min\{\lambda^1, \dots, \lambda^n\}/n = F^i(\lambda^1, \dots, \lambda^n)$ 。]

对称性

对于每个生产效率组合 $(\lambda^1, \dots, \lambda^n)$, $F^1(\lambda^1, \dots, \lambda^n) = \max\{\lambda^1, \dots, \lambda^n\}$, $i \neq 1$ 时, $F^i(\lambda^1, \dots, \lambda^n) = 0$ (所有财富都分配给个人 1), 这个经济制度满足除对称性之外的其他三个性质。

对自身生产效率的单调性

生产效率最低的个人平分 $\max\{\lambda^1, \dots, \lambda^n\}$, 其他人分得的财富为 0, 这个经济制度满足除对自身生产效率的单调性之外的其他三个性质。(如果个人生产效率从 $\min\{\lambda^1, \dots, \lambda^n\}$ 提升到更高值, 那么分配给他的财富会因此减少为 0。)

对他人生产效率的单调性

生产效率最高的人平分 $\max\{\lambda^1, \dots, \lambda^n\}$, 其他人所得财富为 0, 这个经济制度满

足除对他人生生产效率单调之外的其他三个性质。(如果个人 i 的生产效率从小于 $\max\{\lambda^1, \dots, \lambda^n\}$ 变成大于 $\max\{\lambda^1, \dots, \lambda^n\}$, 那么, 之前生产效率为 $\max\{\lambda^1, \dots, \lambda^n\}$ 的个人的财富减少至 0。)

评注

在本章的模型中, 产出(财富)的分配仅取决于生产效率组合, 而不考虑其他因素, 特别是忽略了有关个人需求的信息。这个模型也未涉及个人动机, 而这对大多数经济模型来说都十分重要。我们还假设了个人生产的产量与其生产效率成正比, 即使他无法获得自己生产出的产品。

课后习题

1. 性质之间的关系。请证明以下结论:

- (1) 如果经济制度是匿名的, 则一定是对称的。
- (2) 假设 $n=2$ 。请举出一个经济制度的例子, 该制度对自身生产效率单调, 也是对称的, 但是不具有相对单调性。
- (3) 理想社会经济制度满足效率、对称性、对自身生产效率单调和对他人生生产效率单调四个性质。

2. 投入品和财富都分给生产效率最高的人。在经济制度 F 中, 投入品在生产效率最高的人之间平均分配, 财富也在这些生产效率最高的人之间平均分配。

- (1) 请证明: F 满足对自身生产效率的强单调性。即, 对于任意一个生产效率组合 $(\lambda^1, \dots, \lambda^n)$ 和任意一个数值 $\Delta > 0$:

$$F^i(\lambda^1, \dots, \lambda^n) > 0 \Rightarrow F^i(\lambda^1, \dots, \lambda^i + \Delta, \dots, \lambda^n) > F^i(\lambda^1, \dots, \lambda^n)$$

- (2) 请证明: F 不是唯一一个满足对称性、有效率、对自身生产效率强单调的经济制度。

3. 沙普利值(Shapley value)。一个经济制度满足效率和对称性, 且满足以下两个条件。

零贡献

对任意一个生产效率组合 $(\lambda^1, \dots, \lambda^n)$, 如果 $\lambda^i = 0$, 则 $F^i(\lambda^1, \dots, \lambda^n) = 0$ 。

边际贡献

设 $(\lambda^1, \dots, \lambda^n)$ 是生产效率组合。S 是生产效率最高的那些人组成的集合(生产效率等于 $\max\{\lambda^1, \dots, \lambda^n\}$ 的那些人)。假设在 $(\lambda^1, \dots, \lambda^n)$ 中属于 S 的每个人的生产效率都提高 $\delta > 0$, 得到新的生产效率组合 $\mu = (\mu^1, \dots, \mu^n)$ 。那么, 个人 $j \in S$ 的财富变为 $F^j(\lambda^1, \dots, \lambda^n)$ 加上另外一笔财富(即当属于 S 的所有个人的生产效率均为 δ 而其他人的生产效率均为 0 时, 个人 j 可以得到的财富)。正式表达为: 如果

$$(\mu^1, \dots, \mu^n) = (\lambda^1, \dots, \lambda^n) + (\Delta^1, \dots, \Delta^n)$$

其中, (i) $\Delta^i \in \{0, \delta\}$, (ii) 如果 $\Delta^i > 0$, 则 $\lambda^i = \max\{\lambda^1, \dots, \lambda^n\}$, 那么

$$F^i(\mu^1, \dots, \mu^n) = F^i(\lambda^1, \dots, \lambda^n) + F^i(\Delta^1, \dots, \Delta^n)$$

[举个例子, $F^1(8, 8, 7, 6, 4) = F^1(7, 7, 7, 6, 4) + F^1(1, 1, 0, 0, 0)$]

- (1) 给定这个经济制度 F , 如果 $n=2$ 且生产效率组合为 $(1, 3)$, 财富是如何分配的?
- (2) 给定这个经济制度 F , 如果 $n=4$ 且生产效率组合为 $(1, 3, 6, 10)$, 财富是如何分配的?
- (3) 四个人的生产效率组合为 $(1, 3, 6, 10)$ 。假设这四个人依次到达生产工厂, 共有 24 种可能的先后顺序。某个人的边际贡献等于此人到厂参与生产后财富的增加量。举例来说, 如果四个人到厂的顺序为 $(1, 3, 2, 4)$, 那么, 个人 1 的边际贡献为 1, 个人 3 的边际贡献为 $6-1=5$, 个人 2 的边际贡献为 0 (由于生产效率为 6 的个人 3 在他之前到厂参与生产), 个人 4 的边际贡献为 $10-6=4$ 。

请证明: 每个人边际贡献的平均值恰好等于问题 (2) 中求出的每个人得到的财富。例如, 只有个人 1 第一个到厂时, 其边际贡献才大于 0, 即等于 1。在

24 种可能的先后顺序中, 有 $\frac{1}{4}$ 的可能性是个人 1 最先到厂, 因此其边际贡

献的平均值为 $\frac{1}{4}$ 。

- (4) 请举出一个经济制度的例子, 它只满足这四个性质 (效率、对称性、零贡献、边际贡献) 之中的一个, 但不满足其他三个性质。

本章说明

本章内容受到 John Roemer 的研究 (例如 Roemer, 1986) 的启发。

▶ 20

汇总偏好

当我们讨论公共决策时,经常会谈到一群人(比如一个国家、一个班级或一个家庭)的偏好。群体中所有个人的偏好可能不同,但我们仍常说“这个群体相对于某一个选择更偏好另一个选择”,尽管这种说法其实不准确。我们将在本章讨论一个模型,该模型将所有个人的偏好汇总成一个社会偏好关系。

20.1 社会偏好

社会由一群人组成,每个人都有定义在社会选项集合 X 上的偏好,我们在本章假定这些偏好是给定的。我们拥有的关于每个人偏好的信息是纯序数的(ordinal),即这些信息不能传递每个人对某个选项的偏好程度方面的信息,只能告诉我们他认为一个选项比另一个选项更好,或者他认为两个选项是无差异的。举例来说,给定偏好的信息,我们无法得出“某人对 a 和 b 偏好程度之差大于对 d 和 c 偏好程度之差”或“个人 i 对 a 和 b 偏好程度之差大于个人 j 对 a 和 b 偏好程度之差”。

我们想要将个人偏好汇总成社会偏好。投票程序常被用来把个人偏好汇总成社会偏好。以欧洲歌唱大赛为例。 X 是比赛中表演的歌曲的集合。每个国家提交一份按自己偏好排序的全部参赛歌曲名单(这本身就是对该国所有听众的偏好的汇总)。根据每首歌曲在每个国家提交的名单中的位置给歌曲打分(排在第一的歌曲得 12 分,排在第二的歌曲得 10 分,接下来的 8 首歌曲依次得 8 分、7 分、……、1 分,其他的歌曲得 0 分),然后将每首歌曲在所有国家的分数加总,得出欧洲歌唱大赛的总排名。这个方法是一系列偏好汇总方法中的一个特殊例子,被称为计分规则。稍后,我们将给出它的定义。

少数服从多数规则是一种更简单的确定社会偏好的方法。根据这个规则,如果大多数人相对于 b 更偏好 a ,那么社会对 a 的偏好程度就高于 b 。少数服从多数规则存在一个问题:如果 X 包括多于两个选项,那么所得的双边关系可能不具备传递性,因此不是一个偏好关系。回顾一下我们在第 1 章讨论的孔多塞悖论。一个社会中有三个人(1、2、3)和三个选项(a 、 b 、 c),个人偏好如下所示,每一列按

1	2	3
a	b	c
b	c	a
c	a	b

个人偏好程度从高到低依次排列这三个选项。

个人 1 和 3 相对于 b 更喜欢 a , 个人 1 和 2 相对于 c 更喜欢 b , 个人 2 和 3 相对于 a 更喜欢 c 。因此, 根据少数服从多数规则确定的双边关系 $\succsim$ 满足 $a \succ b \succ c \succ a$, 它不具有传递性。

20.2 偏好汇总函数

本章的核心概念就是偏好汇总函数 (preference aggregation function, PAF), 它将社会中个人的偏好关系与“社会”的偏好关系之间建立起一一对应的关系。偏好汇总函数通常被称为社会福利函数。我们不提倡用这个名称, 因为偏好汇总函数的概念与我们通常所说的个人福利无关。

定义 20.1: 社会

一个社会由有限集合 N (个人的集合) 和有限集合 X (选项的集合) 组成。

偏好汇总函数的定义域是由所有人定义在 X 上的偏好关系组合所构成的集合。为简化分析, 我们假设每个偏好关系都是严格的 (即没有一个人认为任意两个选项是无差异的), 并把严格的偏好关系的组合简称为偏好组合。

我们假设严格偏好关系的所有组合都是可能存在的, 所以偏好汇总函数的定义域包括所有可能的偏好组合 (课后习题第 2 题证明了这个假设的重要性)。对于每个偏好组合, 偏好汇总函数都能确定单一的偏好关系。但我们并未假设社会偏好关系是严格的, 社会偏好中可能包括无差异的情况。

定义 20.2: 偏好汇总函数

一个社会 $\langle N, X \rangle$ 的偏好汇总函数是一个函数, 对于每个对 X 的严格偏好关系的组合, 偏好汇总函数都能确定一个定义在 X 上的 (“社会”) 偏好关系。

请注意, 偏好汇总函数不是单一的偏好关系。它是汇总个人偏好关系以得出一个社会偏好关系的规则。接下来我们举几个例子。

例 20.1: 计算选票

如果认为 x 是最优选项的人多于认为 y 是最优选项的人, 那么, 在社会偏好中, x 优于 y 。换个方式表述就是, 对任意一个偏好组合 $(\succsim^i)_{i \in N}$, 社会偏好关系 $\succsim$ 的定义是:

如果 $|\{i \in N : x \succsim^i a \text{ 对所有 } a \in X\}| \geq |\{i \in N : y \succsim^i a \text{ 对所有 } a \in X\}|$, 则 $x \succsim y$

(注意, 在社会偏好中, 任何一个不被任何人视作最优选项的选项, 与其他所

有同样不被任何人视作最优选项的选项是无差异的,并且排在所有其他选项之下。)

我们可以将这个偏好汇总函数理解为一个计票规则,每个人给其最喜欢的选项投票,根据每个选项得到的票数给所有选项排序,从而确定社会偏好。

例 20.2: 计分规则

给定偏好关系 $\succsim^i$, 一个选项 x 在 $\succsim^i$ 中的位置 $K(\succsim^i, x)$ 是根据至少和 x 一样好的选项的个数决定的, 即 $\succsim^i: K(\succsim^i, x) = |\{a \in X: a \succsim^i x\}|$ 。根据 $\succsim^i$ 找出的最优选项的位置是 1, 次优选项的位置是 2, 以此类推。计分规则是函数 p , 给排在位置 k 的选项确定的分值为 $p(k)$ 。假设 $p(1) \geq \dots \geq p(|X|)$ 。然后, 根据每个选项在所有人的偏好中的分数总和来进行比较。准确来说, 用 p 表示的计分规则给每个偏好组合 $(\succsim^i)_{i \in N}$ 确定一个社会偏好关系 $\succsim$ (定义如下):

$$\text{如果 } \sum_{i \in N} p(K(\succsim^i, x)) \geq \sum_{i \in N} p(K(\succsim^i, y)), \text{ 则 } x \succsim y$$

请注意, 例 20.1 是计分规则的一个特例, 其中: $p(1)=1$; 当 $k \geq 2$ 时, $p(k)=0$ 。

例 20.3: 逐对比赛

对于一对选项 (x, y) , 如果大多数相对于 y 更喜欢 x , 则称 x 打败 y ; 如果喜欢 x 的人和更喜欢 y 的人一样多, 则称 x 和 y 打平。每打败一个选项得 1 分, 每打平一次得 0.5 分。最后, 按所得总分给所有的选项排序。

下面是两个极端的例子。

例 20.4: 外生偏好

社会偏好关系是某一个给定的偏好关系, 与社会中的个人偏好无关。也就是说, 对某一个偏好关系 $\succsim^*$, 当且仅当 $x \succsim^* y$ 时有 $x \succsim y$ 。

例 20.5: 独裁统治

社会偏好关系与社会中一个人(称为独裁者)的偏好关系相同。也就是说, 对于个人 i^* , 当且仅当 $x \succsim^{i^*} y$ 时有 $x \succsim y$ 。

20.3 偏好汇总函数的性质

如何评价一个偏好汇总函数呢? 我们首先找出一些有意义的性质, 然后找出具备这些性质的偏好汇总函数。

中性 如果偏好汇总函数对称地对待各个选项, 则该偏好汇总函数是中性的。也就是说, 如果我们交换任意一对选项在所有人的个人偏好关系中的位置, 那么偏好汇总函数也会交换社会偏好关系中这对选项的位置。这个性质如图 20.1 所示。

举个非中性的偏好汇总函数的例子: 当 $X = \{a, b\}$ 时, 只有至少 $\frac{2}{3}$ 的人相对于 b 更偏好 a 时, 偏好汇总函数才会将 a 排在 b 之前。在 20.2 节中, 除例 20.4 (外生偏好) 之外的所有例子中的偏好汇总函数都是中性的。

1	2	3	...	n-1	n		1	2	3	...	n-1	n
a	b	d	...	a	b		b	a	d	...	b	a
b	a	a	...	d	d		a	b	b	...	d	d
c	c	b	...	c	a	⇒	c	c	a	...	c	b
d	d	c	...	b	c		d	d	c	...	a	c
↓							↓					
b > a							a > b					

图 20.1 中性

注:第一行表示个人的名字,每一列表示个人的偏好,偏好程度最高的位于最上面,偏好程度最低的位于最下面。如果 a 和 b 在所有人的偏好关系中的位置互换,则 a 和 b 在社会偏好关系中的位置也互换。

定义 20.3:中性的偏好汇总函数

社会 $\langle N, X \rangle$ 的一个偏好汇总函数 F 是中性的,如果它满足如下条件:对于任意一对定义在 X 上的偏好关系组合 $(\succsim^i)_{i \in N}$ 和 $(\succeq^i)_{i \in N}$,如果每个人 $i \in N$ 的偏好关系 $\succeq^i$ 是由 $\succsim^i$ 交换选项 x 和 y 的位置所得,那么,偏好关系 $F((\succeq^i)_{i \in N})$ 也是由 $F((\succsim^i)_{i \in N})$ 交换 x 和 y 的位置所得。

匿名性 如果对所有人都区别对待,这个偏好汇总函数是匿名的。考虑两个偏好组合,除了 i 和 j 互换了位置外,其他人的偏好关系都是相同的。如果偏好汇总函数是匿名的,由这两个偏好组合所得的社会偏好关系是一样的。这个性质如图 20.2 所示。在 20.2 节中,除了例 20.5(独裁统治)之外的其他例子中的偏好汇总函数都是匿名的。

1	2	3	...	n-1	n		1	2	3	...	n-1	n
a	b	d	...	a	b		d	b	a	...	a	b
b	a	a	...	d	d		a	a	b	...	d	d
c	c	b	...	c	a	⇒	b	c	c	...	c	a
d	d	c	...	b	c		c	d	d	...	b	c
↓							↓					
b > a							b > a					

图 20.2 匿名性

注:如果两人的偏好互换,社会偏好不变。

定义 20.4:匿名的偏好汇总函数

$(\succsim^i)_{i \in N}$ 和 $(\succeq^i)_{i \in N}$ 是定义在 X 上的偏好关系的两个组合,如果 $\succsim^j = \succeq^k$, $\succsim^k = \succeq^j$,对所有 $i \in N \setminus \{j, k\}$ 有 $\succsim^i = \succeq^i$,且 $F((\succsim^i)_{i \in N}) = F((\succeq^i)_{i \in N})$,那么,社会 $\langle N, X \rangle$ 的偏好汇总函数 F 是匿名的。

正反馈 将选项 x 在某人的偏好关系中的位置向上移一个位次,而其他人的偏好不变,如果原来在社会偏好中的位置不高于 x 的选项 z 在社会偏好中的位置仍然低于 x ,那么,偏好汇总函数是正反馈的。20.2 节中的所有例子中的偏好汇总

函数都是正反馈的。

定义 20.5: 正反馈的偏好汇总函数

如果两个定义在 X 上的偏好关系的组合 $(\succsim^i)_{i \in N}$ 和 $(\triangleright^i)_{i \in N}$ 仅有一点不同: 对于 $j \in N$, $x \in X$, $y \in X$ 有 $y \succ^j x$ 且 $x \triangleright^j y$ (即选项 x 在个人 j 的偏好关系中的位置上移), 则对于任意一个 $z \in X$ 且 $x \succsim z$, 可得 $x \triangleright z$, 其中, $\succsim = F((\succsim^i)_{i \in N})$ 和 $\triangleright = F((\triangleright^i)_{i \in N})$ 是分别由两个人偏好关系组合得到的社会偏好关系 ($\triangleright$ 是由 $\triangleright$ 推出的严格偏好关系), 那么社会 $\langle N, X \rangle$ 的偏好汇总函数 F 是正反馈的。

帕累托 如果任意一个偏好组合中所有人对 x 的偏好程度都高于 y , 而社会偏好关系中对 x 的偏好程度也高于 y , 那么偏好汇总函数就满足帕累托性质。

定义 20.6: 帕累托性质

在定义在 X 上的一个偏好关系的组合 $(\succsim^i)_{i \in N}$ 中, 当对所有 $i \in N$ 都有 $x \succ^i y$ 时, 可得 $x \succ y$ (其中 $\succsim = F((\succsim^i)_{i \in N})$), 那么, 社会 $\langle N, X \rangle$ 的偏好汇总函数 F 满足帕累托性质。

如果计分函数 p 是递减 (而不是非递增的) 函数, 计分规则 (例 20.2) 就满足这个性质。例 20.4 (外生偏好) 不满足这个性质。

我们定义的最后一个性质是不相干选项的独立性 (independence of irrelevant alternatives, IIA)。这个性质讲的是, 在社会偏好中 a 与 b 的相对位置仅取决于个人偏好中 a 与 b 的相对位置, 而与个人对其他选项的偏好无关, 也与个人偏好中 a 或 b 与其他选项的相对位置无关。

定义 20.7: 不相干选项的独立性

对于一个社会 $\langle N, X \rangle$, 其偏好汇总函数 F 满足不相干选项的独立性是指: 对于任意两个定义在 X 上的个人偏好组合 $(\succsim^i)_{i \in N}$ 和 $(\triangleright^i)_{i \in N}$, 只要存在两个选项 x 和 y , 使得对每个个人 $i \in N$ 都有:

$$\text{当且仅当 } x \triangleright^i y, x \succ^i y$$

那么在由 F 汇总得到的社会偏好关系中, 也应满足

$$\text{当且仅当 } x \triangleright y, x \succ y$$

其中, $\succsim = F((\succsim^i)_{i \in N})$ 且 $\triangleright = F((\triangleright^i)_{i \in N})$ 。

独裁统治 (例 20.5) 满足这个性质: 独裁者对任意两个选项的偏好决定了社会对这两个选项的偏好。一些计分规则 (例 20.2) 不满足这个性质。例如, 社会中有三个人和三个选项, 假设计分函数 p 满足 $p(1) - p(2) > 2(p(2) - p(3)) > 0$, 我们来看以下这两个偏好组合:

1	2	3	1	2	3
c	c	c	b	c	c
b	a	a	c	a	a
a	b	b	a	b	b

选项 a 和选项 b 在两个偏好组合中的相对位置相同,但是在左侧的偏好组合中对 a 的偏好程度高于 b ,在右侧的偏好组合中对 b 的偏好程度高于 a 。

20.4 阿罗不可能定理

本章的核心命题为:唯一满足帕累托性质和不相干选项的独立性的偏好汇总函数,就是独裁统治。也就是说,同时满足如下两个条件的真正的偏好汇总函数不可能存在:第一,任意两个选项在社会偏好中的相对位置仅取决于个人对这两个选项的偏好关系,与个人对其他选项的偏好无关;第二,如果所有个人都认为某个选项更好,它在社会偏好中的位置就更靠前。

命题 20.1: 阿罗不可能定理

设 $\langle N, X \rangle$ 是一个社会, X 包括至少三个选项。当且仅当偏好汇总函数 F 是独裁的,它才同时满足帕累托性质和不相干选项的独立性:存在个人 $i^* \in N$,使得对于每个定义在 X 上的偏好关系的组合 $(\succsim^i)_{i \in N}$ 来说,当且仅当 $x \succsim^{i^*} y$ 时有 $x \succsim y$,其中, $\succsim$ 是社会偏好关系 $F((\succsim^i)_{i \in N})$ 。

证明: 如果 F 是独裁的,则满足不相干选项的独立性和帕累托性质。接下来我们证明反过来也成立,即如果 F 满足不相干选项的独立性和帕累托性质,则 F 是独裁的。设 $b \in X$ 。

第一步 考虑这样一个偏好组合,选项 b 在这个组合中要么是最被人喜欢的,要么是最不被人喜欢的,设 $\succsim$ 是 F 由这个偏好组合得到的社会偏好。给定这个偏好组合, b 要么是唯一一个使社会偏好最大的选项,要么是唯一一个使社会偏好最小的选项。

证明: 假设与之相反,还存在另外两个选项 a 和 c , 且 $a \succsim b \succsim c$ 。考虑另外一个偏好组合,它由原来的偏好组合微调后得到:如果个人相对于 c 更偏好 a ,则将 c 移到 a 上面(对于最偏好 b 的那些个人来说, c 总是排在 b 的下面),如下所示:

1	2	3	...	$n-1$	n		1	2	3	...	$n-1$	n
b	b		...	a	b		b	b		...	c	b
	a	a	...					c	c	...	a	
c	c		...	c	a	→	c	a	a	...		c
		c	...		c					...		a
a		b	...	b			a		b	...	b	

与新生成的这个偏好关系对应的社会偏好关系用 $\triangleright$ 表示,它也是由 F 确定的。由帕累托性质可得 $c \triangleright a$ 。由不相干选项的独立性可得社会偏好关系中 a 和 b 的相对位置不变,即 $a \triangleright b$,且 b 和 c 的相对位置不变,即 $b \triangleright c$ 。因此,由传递性可得 $a \triangleright c$,这与 $c \triangleright a$ 相矛盾。■

第二步 考虑两个偏好组合,在这两个偏好组合中,选项 b 要么是每个人最偏好的,要么是每个人最不偏好的,且在这两个偏好组合中最偏好 b 的那些人是一样

的。与这两组偏好关系对应,设 $\succsim$ 和 $\sqsupseteq$ 分别是 F 根据它们确定的社会偏好关系。因此 b 要么对 $\sqsupseteq$ 和 $\succsim$ 来说都是最优选项,要么对 $\sqsupseteq$ 或 $\succsim$ 来说是最差选项。

证明:先考虑其中一个偏好组合。由第一步可知,根据社会偏好关系 $\succsim$,选项 b 要么是偏好程度最高的要么是偏好程度最低的。假设根据社会偏好关系 $\succsim$ 选项 b 是偏好程度最高的。令其他任意一个选项为 x ,在这两个偏好组合中, b 与 x 的相对位置相同。由不相干选项的独立性可得, b 和 x 在社会偏好关系 $\succsim$ 和 $\sqsupseteq$ 中的相对位置也是相同的。因此,根据社会偏好关系 $\sqsupseteq$,选项 b 是也偏好程度最高的。如果根据社会偏好关系 $\succsim$ 选项 b 是偏好程度最低的,同理可证:根据社会偏好关系 $\sqsupseteq$,选项 b 也是偏好程度最低的选择。■

第三步 对于某人 i^* :

(1) 如果在一个偏好组合中,对个人 $1, \dots, i^* - 1$ 来说 b 是偏好程度最高的,对 $i^*, \dots, n$ 来说 b 是偏好程度最低的,那么 b 是唯一一个在 $\succsim$ 中排在最后的选项,其中, $\succsim$ 是由 F 确定的与个人偏好组合对应的社会偏好关系。

(2) 如果在一个偏好组合中,对 $1, \dots, i^*$ 来说 b 是偏好程度最高的,对 $i^* + 1, \dots, n$ 来说 b 是偏好程度最低的,那么 b 是唯一一个在 $\succsim$ 中排在最前(最被偏好)的选项,其中, $\succsim$ 是由 F 确定的与个人偏好组合对应的社会偏好关系。

证明:在某些偏好组合中, b 是所有人最不偏好的选择,以任意一个这样的偏好组合为例。由帕累托性质可知,根据对应的社会偏好关系, b 是社会偏好程度最低的选项。接下来,从个人 1 开始,在每个人的偏好关系中,将 b 从偏好程度最低的选项变为偏好程度最高的选项。由第一步可知,在两种情况下, b 都有同一个性质:要么是唯一个社会偏好程度最高的选项,要么是唯一个社会偏好程度最低的选项。由帕累托性质可知,在所有人的偏好中将 b 从偏好程度最低的选项变为偏好程度最高的选项之后,在社会偏好关系中 b 是唯一一个偏好程度最高的选项。因此,存在某个人 i^* , b 在他的偏好关系中位置的改变使得 b 从社会偏好程度最低的选项变为社会偏好程度最高的选项。由第二步可知,这个 i^* 是谁与个人对其他选项的偏好排序没有关系。■

第四步 对于所有选项 a 和 c ,当且仅当 $a \succ^{i^*} c$ 时有 $a \succ c$ 。

证明:假设与之相反,对于某个偏好组合有 $a \succ^{i^*} c$ 且 $c \succ a$ 。我们对这个偏好组合进行修改:在个人 $1, \dots, i^* - 1$ 的偏好关系中,将 b 变为偏好程度最高的选项;在 $i^* + 1, \dots, n$ 的偏好关系中,将 b 变为偏好程度最低的选项;个人 i^* 对 b 的偏好程度介于 a 和 c 之间。如下所示:

1	...	i^*	...	$n-1$	n		1	...	i^*	...	$n-1$	n
							b	...				
b	...	a	...	a	b	→	b	...			a	
a	...		...	c	c		a	...	b	...	c	a
			c		b			...				
c		b	...				c		c	...	b	b

对于修改后的这个新的偏好组合,我们用 $\sqsupseteq$ 表示 F 确定的对应的社会偏好。

在新旧两个偏好组合中, a 和 c 的相对位置相同, 因此, 由不相干选项的独立性可得 $c \succeq a$ 。在新的偏好组合中, a 和 b 在个人的偏好排序中的相对位置没变, 与个人 $1, \dots, i^* - 1$ 把 b 排在最高且剩下的人把 b 排在最低处时偏好组合中的相对位置一样。于是, 根据第三步和不相干选项的独立性可知, $a \succ b$ 。同理可得 $b \succ c$ 。因此, 由传递性可得 $a \succ c$, 这与 $c \succeq a$ 相矛盾。■

第四步讲的是, i^* 对于任意两个选项(除了 b 以外)的偏好, 可以决定这两个选项的社会偏好关系。我们下一步要证明, i^* 对 b 和其他选项的偏好即为最终的社会偏好。

第五步 对于每个选项 a , 当且仅当 $a \succ^{i^*} b$ 时有 $a \succ b$ 。

证明: 假设在一个偏好组合中 $a \succ^{i^*} b$, c 是除 a 和 b 外的任意一个选项。我们对这个偏好组合进行修改: 在 i^* 的个人偏好中, 如果 c 不位于 b 和 a 之间, 就把 c 移到 b 和 a 之间; 在其他个人偏好中, 把 c 移到最高处, 变成这些人最偏好的选项。如下所示:

1	...	i^*	...	$n-1$	n		1	...	i^*	...	$n-1$	n
c			...	a	b		c			...	c	c
b	...	a	...			→	b	...	a	...	a	b
a	...	b	...	c	c		a	...	c	...		
...			...	b	a				b	...	b	a
		c	...				...		...			

对于修改后的这个偏好组合, 我们用 $\succeq$ 表示 F 确定的对应的社会偏好。由帕累托性质可知 $c \succ b$ 。由第四步可得, i^* 对 b 和 c 的个人偏好就是社会偏好, 由此可得 $a \succ c$, 由传递性可得 $a \succ b$ 。由于在新旧两个偏好组合中 a 和 b 的偏好关系相同, 根据不相干选项的独立性可得 $a \succ b$ 。■

评注

1. 到目前为止, 我们将偏好汇总函数理解为由个人偏好组合生成一个社会偏好的一种方法。我们也可以将偏好汇总函数理解为一个人基于几个标准确定对一组选项的偏好的方法。举例来说, 一个人可能会基于汽车的相对价格、汽车杂志给这些汽车的排名和耗油量等标准, 来确定对这些汽车的个人偏好。在这种情况下, 命题 20.1 可以理解为: 如果个人偏好形成的过程满足帕累托性质, 且任意两个选项在个人偏好中的相对位置完全符合某些标准, 那么, 除非偏好关系与这些标准一致, 否则, 这个偏好关系是不可传递的。
2. 有的人认为命题 20.1 可以证明汇总一个群体中所有人的偏好是不可能的, 这个想法是错误的。命题 20.1 至多表明以如下方式汇总个人偏好是不可能的: 社会偏好中任意两个选项的相对位置完全由个人偏好中这两个选项的相对位置决定。这个要求可以理解为人们希望偏好汇总的过程尽量简单。在例 20.2 的计分规则中, 如果计分函数是递减的, 那么它具备本章提

到的除了不相干选项的独立性之外的所有性质。

3. 偏好汇总函数要适用于所有偏好组合,这个要求其实是非常苛刻的。在很多情况下,偏好汇总函数仅适用于某些偏好组合。事实上,如果对个人偏好组合施加一些有意义的限制,根据少数服从多数规则就可以得到可传递的社会偏好关系。比如,所有选项都依次排在一条线上(例如,政治观点中从左倾到右倾的排列),每个人都有一个最优选项,且对最优选项的左右两侧的选项的偏好程度随着它们与最优选项的距离的增大而递减,也就是说,个人偏好关系是单峰的。在这种情形下,利用少数服从多数规则的偏好汇总函数总可以找出一个社会偏好关系(见课后习题第2题)。
4. 正如之前提到的,偏好汇总函数仅仅使用个人偏好的排序信息,不考虑每个人的偏好程度是多少的问题,也不比较不同人的偏好程度的差异。考虑一个包括两个人和两个选项的社会。如果一个人喜欢选项 a 而另外一个人喜欢选项 b ,那么一个合理的偏好汇总办法应该以比较这两个人对 a 和 b 的偏好程度的差别为基础。本章的模型没有考虑这方面的信息。

20.5 吉伯德-萨特思维特定理

在本章的最后一节,我们来学习另一个经典定理:吉伯德-萨特思维特定理(Gibbard-Satterthwaite theorem)。这个定理涉及社会选择规则的概念,它与偏好汇总函数相关,但又有所不同。偏好汇总函数为每个个人偏好组合确定一个社会偏好关系,而社会选择规则给每个个人偏好组合确定一个最优选项,即在给定所有人偏好的情况下,社会所选的那个选项。

定义 20.8:社会选择规则

一个社会 $\langle N, X \rangle$ 的社会选择规则(social choice rule)是一个函数,它为每个定义在 X 上的严格偏好关系组合找出集合 X 中的一个元素。

我们对具备以下两个性质的社会选择规则比较感兴趣。第一个性质:如果有人一致认为某个选项是最优选项,则社会选择规则就确定这个选项为最优选项。

定义 20.9:全体一致的社会选择规则

对于每个定义在 X 上的偏好关系的组合 $(\succsim^i)_{i \in N}$,如果对所有 $i \in N$, x 都是 $\succsim^i$ 偏好下最优的,那么可得 $f((\succsim^i)_{i \in N}) = x$ 。如果满足这个性质,那么 $\langle N, X \rangle$ 的社会选择规则 f 是全体一致的(unanimous)。

第二个性质对社会选择规则来说至关重要。社会规则的制定者要求每个人上报其偏好。这个性质要求,对每个人来说,无论其真实偏好是什么,无论其他人上报的偏好是什么,上报其真实偏好都是每个人的最优选择。我们在第17章(定义17.4)中讨论过这个性质,即策略防范性。

定义 20.10:具有策略防范性的社会选择规则

如果对于每个 $j \in N$ 和每个定义在 X 上的偏好关系组合 $(\succsim^i)_{i \in N}$ 来说,在个

人 j 的偏好关系为任意的 $\succeq^j$ 时, 都有 $f((\succeq^i)_{i \in N}) \succeq^j f((\succeq^i)_{i \in N})$ (其中, 对所有 $i \in N \setminus \{j\}$ 都有 $\succeq^i = \succeq^i$), 那么, $\langle N, X \rangle$ 的社会选择规则是具有策略防范性的。也就是说, 无论其他人上报的偏好是什么, 个人 j 最好都上报其真实偏好。

哪些社会选择规则是全体一致的且具有策略防范性的? 令人震惊的答案是: 如果 X 至少包括三个选项, 那么唯一一个具备这两个性质的社会选择规则是独裁统治。在这种情况下, 社会最终选出的选项是某个人(独裁者)上报的偏好关系中偏好程度最高的选项。每个独裁统治都具有策略防范性, 原因有两个: 第一, 社会选出的选项是独裁者上报的偏好关系中偏好程度最高的选项, 所以独裁者不会因谎报而获益; 第二, 社会选出的选项与其他人的选择无关, 故其他人也不会因谎报而获益。接下来, 我们要证明不存在其他社会选择规则同时具有全体一致性和策略防范性。命题 20.2 可以用几种不同的方式来证明, 最终我们用阿罗不可能定理来证明。

命题 20.2: 吉伯德-萨特思维特定理

在任意一个社会 $\langle N, X \rangle$ 中, X 包括至少三个选项, 任意一个同时具有全体一致性和策略防范性的社会选择规则都是独裁统治: 对于某人 $i^* \in N$ 和每个定义在 X 上的偏好关系的组合 $(\succeq^i)_{i \in N}$ 来说, $f((\succeq^i)_{i \in N}) \succeq^{i^*} x$ 对所有 $x \in X$ 都成立。

证明: 设 f 是具有全体一致性和策略防范性的社会选择规则。

第一步 如果 $(\succeq^i)_{i \in N} = x$, 且 $(\succeq^i)_{i \in N}$ 和 $(\succeq^i)_{i \in N}$ 仅有一点不同: 对于某人 j 来说, 选项 y 在偏好关系是 $\succeq^j$ 时比偏好关系是 $\succeq^j$ 时更有吸引力, 那么, 有 $f((\succeq^i)_{i \in N}) \in \{x, y\}$ 。

证明: 假设与之相反, $f((\succeq^i)_{i \in N}) = z$, $z \notin \{x, y\}$ 。

如果 $z \succ^j x$, 则 f 不具有策略防范性。因为当个人 j 的偏好关系是 $\succeq^j$ 时, 如果其他人 i 上报的偏好为真实偏好 $\succeq^i$, 那么个人 j 上报 $\succeq^j$ 会使结果对自己更有利。

如果 $x \succ^j z$ 则 $x \succ^j z$, 且 f 不具有策略防范性。因为当个人 j 的偏好关系是 $\succeq^j$ 且其他人 i 上报的偏好为 $\succeq^i = \succeq^i$ 时, 个人 j 最好选择上报 $\succeq^i$ 而不是 $\succeq^j$ (上报 $\succeq^j$ 可得 z , 而上报 $\succeq^i$ 可得收入 x)。■

第二步 给定任意两个选项 x 和 y 和任意一个偏好组合, 如果 x 和 y 对所有人来说都是偏好程度最靠前的两个选项, 那么社会选择规则 f 确定的选项不是 x 就是 y 。

证明: 假设存在一些偏好组合, 在这些偏好组合中, 选项 x 和 y 对所有人来说都是偏好程度最靠前的两个选项, 但是 f 确定的选项既不是 x 也不是 y 。在这类偏好组合中, 找出相对于 y 更偏好 x 的个人的人数最多的那个偏好组合(假设为 $(\succeq^i)_{i \in N}$)。但这个人数不可能是 n , 因为由全体一致性可知, 如果所有人都相对于 y 更偏好 x 的话, f 选出的选项一定是 x 。令 $f((\succeq^i)_{i \in N}) = z$, 并令个人 j 是满足 $y \succ^j x$ 的那个人。如果在个人 j 上报的偏好中他对 x 的偏好程度最高, 对 y 的偏好程度次之, 那么 f 确定的选项要么是 x 要么是 y , 但是选项 x 和 y 都比 z 好, 这

与 f 的策略防范性相违背。 ■

第三步 $(\geq^i)_{i \in N}$ 和 $(\sqsupseteq^i)_{i \in N}$ 是两个偏好组合, 如果选项 x 和 y 对所有人来说都是偏好程度最靠前的两个选项, 且当且仅当 $x \sqsupseteq^i y$ 时有 $x \succ^i y$, 那么, 有 $f((\geq^i)_{i \in N}) = f((\sqsupseteq^i)_{i \in N})$ 。

证明: 由第二步可得 $f((\geq^i)_{i \in N}) \in \{x, y\}$, 不失一般性地, 假设 $f((\geq^i)_{i \in N}) = x$ 。我们可以通过一系列步骤将 $(\geq^i)_{i \in N}$ 变为 $(\sqsupseteq^i)_{i \in N}$, 在每一步我们将 x 和 y 以外的某个选项在某一个人的偏好关系中上移, 与此同时保持 x 和 y 在所有人的偏好关系中位于最靠前的两个位置。由第一步可知, 在每次移动之后, f 所确定的选项要么是被我们移动的那个选项, 要么是在移动之前 f 所确定的选项。由第二步可知, 在每一步移动后, f 所确定的选项要么是 x , 要么是 y 。因此, 每一步移动后 f 所确定的选项只能是 x 。因此可以得出 $f((\sqsupseteq^i)_{i \in N}) = x$ 。

第四步 给定偏好关系组合 $(\geq^i)_{i \in N}$, 我们定义一个社会双边关系 $\geq$: 如果 $f((\geq^i)_{i \in N}) = x$ 则 $x \geq y$ 。其中, 对所有人 i 来说, 偏好关系 $\geq^i$ 是偏好关系 $\geq$ 经如下调整得到: 在保持 x 和 y 相对顺序不变的前提下, 把二者变为偏好程度最靠前的选项。这个社会双边关系 $\geq$ 是完备的且可传递的。

证明: 完备性由第二步可得。由第三步可知, 这个偏好关系是非对称的 (因为不存在两个选项同时满足 $a \geq b$ 和 $b \geq a$)。假设 $a \geq b \geq c \geq a$, 即可传递性成立。考虑这样一个偏好关系组合 $(\sqsupseteq^i)_{i \in N}$: 在所有人的偏好关系 $(\geq^i)_{i \in N}$ 中将 a 、 b 、 c 这三个选项变为偏好程度最靠前的三个选项。由类似于第二步的证明可得 $f((\sqsupseteq^i)_{i \in N}) \in \{a, b, c\}$ 。不失一般性地, 令 $f((\sqsupseteq^i)_{i \in N}) = a$ 。现在, 将 b 在所有人的偏好关系中移到第三名的位置, 得到一个新的偏好关系的组合 $(\geq^i)_{i \in N}$ 。由第一步和第二步可知 $f((\geq^i)_{i \in N}) = a$ 。对每个人来说, a 和 c 在 $(\sqsupseteq^i)_{i \in N}$ 和 $(\geq^i)_{i \in N}$ 中的相对位置相同, 因此, 由第三步可知 (给定 $c \geq a$) $f((\geq^i)_{i \in N}) = c$, 这与 $f((\geq^i)_{i \in N}) = a$ 相矛盾。 ■

第五步 第四步定义的偏好汇总函数 F 具有独裁性质。

证明: 由第三步可知 F 满足不相干选项的独立性, 由 f 的全体一致性可知 F 满足帕累托性质。根据阿罗不可能定理, 这个社会偏好完全由一个人的偏好决定, 偏好汇总函数具有独裁性质。 ■

第六步 存在个人 i^* 使得 $f((\geq^i)_{i \in N})$ 对他来说是最优选择。

证明: 由第五步可知, 对于任意一个偏好关系的组合 $(\geq^i)_{i \in N}$ 来说, 存在一个人 i^* 使得 $F((\geq^i)_{i \in N}) = \geq^{i^*}$ 。令 $f((\geq^i)_{i \in N}) = x$, y 是另一个选项。由第一步可知 $f((\sqsupseteq^i)_{i \in N}) = x$, 其中的 $\sqsupseteq^i$ 是这样得到的: 在偏好关系 $\geq^i$ 中将 x 和 y 以外的所有选项都移到 x 和 y 的下方 (x 和 y 的相对位置不变)。根据第四步中 F 的定义, $F((\geq^i)_{i \in N})$ 把 x 排在 y 的前面。因为个人 i^* 就是那个个人偏好决定社会偏好的“独裁者”, 所以有 $x \succ^{i^*} y$ 。 ■

请注意, 假设 X 包括三个选项对这个命题的证明来说至关重要。如果 X 仅包括两个选项 a 和 b , 那么对任意一个数字 K , 除非 K 个人相对于 a 更喜欢 b , 否则社

会选择规则将选定 a , 这个规则就是具有策略防范性的。

课后习题

1. 两个选项。设 $X = \{a, b\}$, 且假设所有人的偏好都是严格的(每个人要么相对于 b 更喜欢 a , 要么相对于 a 更喜欢 b)。假设人数是奇数。

讨论中立性、匿名性和正相关性。

- (1) 对于每个性质, 举一个偏好汇总函数的例子, 它只满足该性质而不满足另外两个性质。

- (2) 请证明: 少数服从多数规则是唯一一个满足这三个性质的偏好汇总函数。

2. 单峰偏好。假设 X 包括三个选项: L 、 M 和 R 。社会中的人数为奇数。定义在 X 上的所有偏好有 6 种, 但我们把偏好 $L \succ R \succ M$ 和 $R \succ L \succ M$ 排除掉, 也就是说, 我们假设每个人的偏好关系只能是剩下的 4 种偏好关系中的一个, 在这 4 种偏好关系中, M 不是偏好程度最低的选项。

请证明: 根据少数服从多数规则可以得到定义在 X 上的偏好关系。

3. 分类。一组人讨论三个政治家: a 、 b 、 c 。每个人对政治家的看法是以下三种看法之一: (1) 他们各不相同; (2) 他们全都一样; (3) 有两个政治家相同, 而有一个政治家 (a 、 b 或 c) 与这两个政治家不同。

我们想要设计一个汇总方法用来判定三个政治家是否属于一类。我们称该汇总方法满足性质 T , 如果它满足如下条件: 对于任何一个人看法的组合, 这个方法都不会在判定某政治家 x 与另外两个政治家 y 和 z 相同的同时, 判定政治家 y 和 z 不相同。

- (1) 请证明: 因为大多数人认为两个政治家是一样的就把这两个政治家归为相同一类的汇总方法是不满足性质 T 的。

- (2) 请证明: 因为某一个群体 $G \subseteq \{1, 2, 3\}$ 中所有人都认为两个政治家是一样的就把这两个政治家归为相同一类的汇总方法, 是满足性质 T 的。

4. 锦标赛参赛者的排名。 n 个参赛者参加循环锦标赛。每场比赛最后都只有一个参赛者获胜(不可能出现平局)。为了得到参赛者的最终排名, 要采用一种排名办法, 它的作用是为每个可能的结果组合确定参赛者的排序(可能存在成绩相同的人)。

考虑排名方法的以下三种性质。

匿名性: 排名方法对所有参赛者一视同仁。

单调性: 设 R_1 是这样的结果组合: 排名方法所决定的参赛者 i 的名次至少和参赛者 j 的名次一样高。设 R_2 只与 R_1 有一点不同, 是这样的结果组合: 在 R_1 中某个参赛者赢了 i , 但他在 R_2 中输给了 i 。那么, 在 R_2 中排名方法所决定的参赛者 i 的名次一定(严格)高于参赛者 j 。

独立性: 任意两个参赛者的相对名次与他们俩没参加的那些比赛的结果无关。

- (1) 根据每个参赛者获胜的场(次)数给参赛者排名是一种比较常见的方法。请证明这个方法具备以上这三种性质。
- (2) 请举三个排序方法的例子,要求他们分别具备其中的某两种性质,但不具备剩下的一种性质。
5. 中位数。当偏好的空间受到某些限制时,存在非独裁且具有策略防范性的社会选择规则。假设社会中个人的数量是 $(2m+1)$ (m 为某一个正整数), $X=[0, 1]$, 每个人 i 有一个单峰偏好(存在 $z^i \in X$ 使得: 如果 $z^i < a < b$ 或 $b < a < z^i$, 则 $z^i >^i a >^i b$)。请证明: 把偏好组合中所有人峰值的中位数确定为最优选择的社会选择规则具有策略防范性。

本章说明

命题 20.1 由 Arrow(1951)提出。我们给出的证明来自 Geanakoplos(2005)。
命题 20.2 由 Gibbard(1973)和 Satterthwaite(1975)提出。课后习题第 1 题以 May(1952)为基础,课后习题第 4 题以 Rubinstein(1980)为基础。

参考文献

- Akerlof, George A. (1970), "The market for 'lemons': quality uncertainty and the market mechanism." *Quarterly Journal of Economics*, 84, 488–500, <https://doi.org/10.2307/1879431>. [201]
- Allais, Maurice (1953), "Le comportement de l'homme rationnel devant le risque: critique des postulats et axiomes de l'école Américain." *Econometrica*, 21, 503–546. [43]
- Arrow, Kenneth J. (1951), *Social choice and individual values*, first edition. Wiley, New York. [326]
- Arrow, Kenneth J. (1964), "The role of securities in the optimal allocation of risk-bearing." *Review of Economic Studies*, 31, 91–96. [Translation of paper originally published in French in 1953.] [173]
- Arrow, Kenneth J., and Gerard Debreu (1954), "Existence of an equilibrium for a competitive economy." *Econometrica*, 22, 265–290. [155]
- Basu, Kaushik (1994), "The Traveler's Dilemma: paradoxes of rationality in game theory." *American Economic Review (Papers and Proceedings)*, 84, 391–395. [247]
- Bertrand, Joseph (1883), "Review of 'Théorie mathématique de la richesse sociale' by Léon Walras and 'Recherches sur les principes mathématiques de la théorie des richesses' by Augustin Cournot." *Journal des Savants*, 499–508. [Translated by Margaret Chevallier as 'Review by Joseph Bertrand of two books', *History of Political Economy*, 24 (1992), 646–653.] [247]
- Borel, Émile (1921), "La théorie du jeu et les equations intégrales à noyau symétrique." *Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences (Paris)*, 173, 1304–1308. [Translated by Leonard J. Savage as "The theory of play and integral equations with skew symmetric kernels", *Econometrica*, 21 (1953), 97–100.] [246, 247]
- Borel, Émile (1924), *Éléments de la théorie des probabilités*, third edition. Hermann, Paris. [Pages 204–221 translated by Leonard J. Savage as "On games that involve chance and the skill of the players", *Econometrica*, 21 (1953), 101–115.] [247]

- Borel, Émile (1927), "Sur les systèmes de formes linéaires à déterminant symétrique gauche et la théorie générale du jeu." *Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences (Paris)*, 184, 52–54. [Translated by Leonard J. Savage as "On systems of linear forms of skew symmetric determinant and the general theory of play", *Econometrica*, 21 (1953), 116–117.] [247]
- Chernoff, Herman (1954), "Rational selection of decision functions." *Econometrica*, 22, 422–443. [29]
- Clarke, Edward H. (1971), "Multipart pricing of public goods." *Public Choice*, 11, 17–33. [288]
- Cournot, Antoine A. (1838), *Recherches sur les principes mathématiques de la théorie des richesses*. Hachette, Paris. [Translated by Nathaniel T. Bacon as *Researches into the mathematical principles of the theory of wealth*, Macmillan, New York, 1897.] [246, 247]
- Davidson, Donald, J. C. C. McKinsey, and Patrick Suppes (1955), "Outlines of a formal theory of value, I." *Philosophy of Science*, 22, 140–160, <https://doi.org/10.1086/287412>. [29]
- Debreu, Gerard (1954), "Representation of a preference ordering by a numerical function." In *Decision processes* (Robert M. Thrall, Clyde H. Coombs, and Robert L. Davis, eds.), chapter 11, 159–165, Wiley, New York. [15, 56]
- Debreu, Gerard (1959), *Theory of value*. Yale University Press, New Haven. [155]
- Edgeworth, Francis Y. (1881), *Mathematical psychics*. Kegan Paul, London. [155]
- Flood, Merrill M. (1958/59), "Some experimental games." *Management Science*, 5, 5–26. [247]
- Frisch, Ragnar (1957), "Sur un problème d'économie pure." *Metroeconomica*, 9, 79–111, <https://doi.org/10.1111/j.1467-999X.1957.tb00651.x>. [Republication of 1926 work.] [15]
- Gale, David, and Lloyd S. Shapley (1962), "College admissions and the stability of marriage." *American Mathematical Monthly*, 69, 9–15, <https://doi.org/10.4169/amer.math.monthly.120.05.386>. [299]
- Geanakoplos, John (2005), "Three brief proofs of Arrow's impossibility theorem." *Economic Theory*, 26, 211–215, <https://doi.org/10.1007/s00199-004-0556-7>. [326]

- Gibbard, Allan (1973), "Manipulation of voting schemes: a general result." *Econometrica*, 41, 587–601, <https://doi.org/10.2307/1914083>. [326]
- Glazer, Jacob, and Ching-to Albert Ma (1989), "Efficient allocation of a 'prize'—King Solomon's dilemma." *Games and Economic Behavior*, 1, 222–233, [https://doi.org/10.1016/0899-8256\(89\)90010-9](https://doi.org/10.1016/0899-8256(89)90010-9). [278]
- Groves, Theodore (1973), "Incentives in teams." *Econometrica*, 41, 617–631, <https://doi.org/10.2307/1914085>. [288]
- Groves, Theodore, and Martin Loeb (1975), "Incentives and public inputs." *Journal of Public Economics*, 4, 211–226, [https://doi.org/10.1016/0047-2727\(75\)90001-8](https://doi.org/10.1016/0047-2727(75)90001-8). [288]
- Harris, Christopher, and John Vickers (1985), "Perfect equilibrium in a model of a race." *Review of Economic Studies*, 52, 193–209, <https://doi.org/10.2307/2297616>. [278]
- Hotelling, Harold (1929), "Stability in competition." *Economic Journal*, 39, 41–57, <https://doi.org/10.2307/2224214>. [247]
- Huber, Joel, John W. Payne, and Christopher Puto (1982), "Adding asymmetrically dominated alternatives: violations of regularity and the similarity hypothesis." *Journal of Consumer Research*, 9, 90–98, <https://doi.org/10.1086/208899>. [29]
- Jones, Peter, and Li-Jen Jessica Hwang (2005), "Perceptions of waiting time in different service queues." [Unpublished paper.] [199]
- Kagel, John H., and Dan Levin (1993), "Independent private value auctions: bidder behaviour in first-, second- and third-price auctions with varying numbers of bidders." *Economic Journal*, 103, 868–879, <https://doi.org/10.2307/2234706>. [225]
- Kahneman, Daniel, and Amos Tversky (1984), "Choices, values, and frames." *American Psychologist*, 39, 341–350, <https://doi.org/10.1037/0003-066X.39.4.341>. [29]
- Kuhn, Harold W. (1950), "Extensive games." *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 36, 570–576. [278]
- Kuhn, Harold W. (1953), "Extensive games and the problem of information." In *Contributions to the theory of games*, volume II (Harold W. Kuhn and Albert W. Tucker, eds.), 193–216, Princeton University Press, Princeton. [278]

- Luce, R. Duncan, and Howard Raiffa (1957), *Games and decisions*. Wiley, New York. [20, 29]
- Marshall, Alfred (1895), *Principles of economics*, third edition, volume 1. Macmillan, London. [74]
- Marx, Karl (1971), *Critique of the Gotha Programme*. Progress Publishers, Moscow. [Written in 1875; first published in 1890.] [303]
- May, Kenneth O. (1952), "A set of independent necessary and sufficient conditions for simple majority decision." *Econometrica*, 20, 680–684, <https://doi.org/10.2307/1907651>. [326]
- Maynard Smith, John (1974), "The theory of games and the evolution of animal conflicts." *Journal of Theoretical Biology*, 47, 209–221, [https://doi.org/10.1016/0022-5193\(74\)90110-6](https://doi.org/10.1016/0022-5193(74)90110-6). [247]
- McKenzie, Lionel (1954), "On equilibrium in Graham's model of world trade and other competitive systems." *Econometrica*, 22, 147–161, <https://doi.org/10.2307/1907539>. [155]
- McKenzie, Lionel W. (1959), "On the existence of general equilibrium for a competitive market." *Econometrica*, 27, 54–71, <https://doi.org/10.2307/1907777>. [155]
- Moulin, Hervé (1986), *Game theory for the social sciences*, second edition. New York University Press, New York. [247]
- Nash, John F. (1950), "Equilibrium points in n -person games." *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 36, 48–49, <https://doi.org/10.1073/pnas.36.1.48>. [246]
- O'Neill, Barry (1987), "Nonmetric test of the minimax theory of two-person zero-sum games." *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 84, 2106–2109. [247]
- Piccione, Michele, and Ariel Rubinstein (2007), "Equilibrium in the jungle." *Economic Journal*, 117, 883–896, <https://doi.org/10.1111/j.1468-0297.2007.02072.x>. [120]
- Pratt, John W. (1964), "Risk aversion in the small and in the large." *Econometrica*, 32, 122–136, <https://doi.org/10.2307/1913738>. [43]

- Roemer, John E. (1986), "Equality of resources implies equality of welfare." *Quarterly Journal of Economics*, 101, 751–784, <https://doi.org/10.2307/1884177>. [310]
- Roemer, John E. (2010), "Kantian equilibrium." *Scandinavian Journal of Economics*, 112, 1–24, <https://doi.org/10.1111/j.1467-9442.2009.01592.x>. [247]
- Rosenthal, Robert W. (1981), "Games of perfect information, predatory pricing and the chain-store paradox." *Journal of Economic Theory*, 25, 92–100, [https://doi.org/10.1016/0022-0531\(81\)90018-1](https://doi.org/10.1016/0022-0531(81)90018-1). [247, 278]
- Rothschild, Michael, and Joseph E. Stiglitz (1976), "Equilibrium in competitive insurance markets: an essay on the economics of imperfect information." *Quarterly Journal of Economics*, 90, 629–649, <https://doi.org/10.2307/1885326>. [213]
- Rubinstein, Ariel (1980), "Ranking the participants in a tournament." *SIAM Journal of Applied Mathematics*, 38, 108–111, <https://doi.org/10.1137/0138009>. [326]
- Rubinstein, Ariel (1982), "Perfect equilibrium in a bargaining model." *Econometrica*, 50, 97–109, <https://doi.org/10.2307/1912531>. [278]
- Rubinstein, Ariel (2006a), *Lecture notes in microeconomic theory*. Princeton University Press, Princeton, <https://doi.org/10.2307/j.ctvc4hb2>. [15, 29, 43, 56, 74, 87]
- Rubinstein, Ariel (2006b), "A sceptic's comment on the study of economics." *Economic Journal*, 116, C1–C9, <https://doi.org/10.1111/j.1468-0297.2006.01071.x>. [87]
- Rubinstein, Ariel (2012), *Economic fables*. Open Book Publishers, Cambridge, <https://doi.org/10.11647/OBP.0020>. [xiii, 120, 135]
- Samuelson, Paul A. (1938), "A note on the pure theory of consumer's behaviour." *Economica*, 5, 61–71, <https://doi.org/10.2307/2548836>. [74]
- Satterthwaite, Mark A. (1975), "Strategy-proofness and Arrow's conditions: existence and correspondence theorems for voting procedures and social welfare functions." *Journal of Economic Theory*, 10, 187–217, [https://doi.org/10.1016/0022-0531\(75\)90050-2](https://doi.org/10.1016/0022-0531(75)90050-2). [326]

- Selten, Reinhard (1965), "Spieltheoretische Behandlung eines Oligopolmodells mit Nachfrageträgheit." *Zeitschrift für die gesamte Staatswissenschaft*, 121, 301–324 and 667–689. [278]
- Shapley, Lloyd S., and Herbert Scarf (1974), "On cores and indivisibility." *Journal of Mathematical Economics*, 1, 23–37. [135]
- Simon, Herbert A. (1956), "Rational choice and the structure of the environment." *Psychological Review*, 63, 129–138, <https://doi.org/10.1037/h0042769>. [29]
- Slutsky, Eugenio (1915), "Sulla teoria del bilancio del consumatore." *Giornale degli Economisti e Rivista di Statistica*, 51, 1–26. [74]
- Spence, Michael (1973), "Job market signaling." *Quarterly Journal of Economics*, 87, 355–374, <https://doi.org/10.2307/1882010>. [213]
- Tirole, Jean (1988), *The theory of industrial organization*. MIT Press, Cambridge. [102]
- Topkis, Donald M. (1979), "Equilibrium points in nonzero-sum n -person submodular games." *SIAM Journal on Control and Optimization*, 17, 773–787, <https://doi.org/10.1137/0317054>. [246]
- Tversky, Amos, and Daniel Kahneman (1986), "Rational choice and the framing of decisions." *Journal of Business*, 59, S251–S278. [29]
- Vickrey, William (1961), "Counterspeculation, auctions, and competitive sealed tenders." *Journal of Finance*, 16, 8–37, <https://doi.org/10.1111/j.1540-6261.1961.tb02789.x>. [247, 288]
- von Neumann, John (1928), "Zur theorie der gesellschaftsspiele." *Mathematische Annalen*, 100, 295–320. [Translated by Sonya Bargmann as "On the theory of games of strategy" in *Contributions to the theory of games*, volume IV (Albert W. Tucker and R. Duncan Luce, eds.), 13–42, Princeton University Press, Princeton, 1959.] [246]
- von Neumann, John, and Oskar Morgenstern (1944), *Theory of games and economic behavior*, first edition. Princeton University Press, Princeton. [246, 278]
- von Neumann, John, and Oskar Morgenstern (1947), *Theory of games and economic behavior*, second edition. Princeton University Press, Princeton. [43]

Walras, Léon (1874), *Éléments d'économie politique pure*. Corbaz, Lausanne. [155]

Wold, Herman O. A. (1943), "A synthesis of pure demand analysis, Part II." *Skandinavisk Aktuarietidskrift*, 26, 220–263, <https://doi.org/10.1080/03461238.1943.10404737>. [15]

Zahavi, Amotz (1975), "Mate selection—a selection for a handicap." *Journal of Theoretical Biology*, 53, 205–214, [https://doi.org/10.1016/0022-5193\(75\)90111-3](https://doi.org/10.1016/0022-5193(75)90111-3). [213]

译后记

在所有中级微观经济学教材中,本书是非常独特的,表现在三个方面:

第一,篇幅小。本书在整体框架上与其他微观经济学教材差别不大,但篇幅明显更小。在这么有限的篇幅内,把现代微观经济学呈现给读者,并让读者读懂,甚至喜欢,是件非常不容易的事。对于那些想在看完一本书之后就对现代微观经济学有完整、详细了解的读者来说,这本书不是首选,但它几乎也是必读之书。

第二,强调均衡。与大多数中级微观经济学教材不同,本书不但在内容上做了一番取舍,还突出了一个关键词“均衡”,并基本以它为主线展开讨论,不吝笔墨讨论各种情形下“均衡”的定义及其存在性、唯一性、稳定性等性质。这种写法清新独特、系统严谨,更重要的是,让读者对经济学的理解深度在不知不觉中提高了。看完全书以后,你很可能会发现这是一本披着中级微观经济学外衣的准高级微观经济学教材,因为它所包含的对经济学的理解和分析是高于中级水平的。

第三,似无模型之处见模型。看到本书书名时,读者很可能会预期书中有大量的数学公式,但在翻完全书后很可能会大吃一惊。这本书里的数学公式几乎比所有的中级微观经济学教材都少,连简单的微积分都看不到。

很多人都误将模型等同于数学公式或者数学推导。“模型”的本质是对事物的抽象化概括,去掉一些不重要或者被认为不重要的因素,保留甚至突出可能重要或者要重点研究的因素,然后研究这些因素之间的关系。本书在讨论每个模型的时候,都会清楚地告诉读者做了哪些重要假设(忽略掉了哪些因素和保留了哪些因素),也会讨论或提示假设条件发生变化以后,结果会发生什么变化。在这个过程中,几乎没有数学公式,只有大量的数学符号以及一些图表。严格来讲,数学符号也不是必需的,但借助它们可以把概念、思想和分析表述得更简洁和准确。

本书的这种写法非常可贵,能帮助读者真正理解经济学模型的本质,让读者知道如何构建一个经济学模型来研究现实中的经济问题。撰写本书的两位经济学家都是博弈论领域的大师级人物。运用自己掌握的数学知识和工具来写一本与常见教材类似的中级或高级微观经济学教材,对他们来说应该毫无困难。但他们在本书中显然克制了使用数学工具的冲动。其苦心可能就在于想让更多的人理解经济学和经济学模型,避免让很多人看到复杂的数学外衣就望而生畏。

正由于以上三个方面的特点,无论是经济类专业的本科生、研究生和授课教师,还是其他专业的学生,都应该会发现这是一本值得花时间读的书。只要耐心地理解和熟悉书中的数学语言,细心地揣摩论证逻辑,你就会发现经济学模型没有那么高深,它很美,很有趣!

本书由中南财经政法大学的赵雪倩与我合作翻译。中南财经政法大学的王晶鑫、齐珂、陈江宇和邸诗晴参与了本书的校对工作。若有翻译不当之处,恳请读者谅解并反馈。

中南财经政法大学经济学院
林相森

图书在版编目(CIP)数据

微观经济理论模型 / (加) 马丁·J. 奥斯本, (以)
阿里尔·鲁宾斯坦著; 林相森, 赵雪倩译. -- 上海:
格致出版社: 上海人民出版社, 2026. -- (当代经济学
系列丛书 / 陈昕主编). -- ISBN 978-7-5432-3758-2
I. F016
中国国家版本馆 CIP 数据核字第 2025AX1669 号

责任编辑 王 萌

封面设计 敬人设计工作室 吕敬人

当代经济学系列丛书·当代经济学教学参考书系

微观经济理论模型

[加] 马丁·J. 奥斯本 [以] 阿里尔·鲁宾斯坦 著
林相森 赵雪倩 译

出 版 格致出版社
上海三联书店
上海人民出版社
(201101 上海市闵行区号景路 159 弄 C 座)
发 行 上海人民出版社发行中心
印 刷 浙江临安曙光印务有限公司
开 本 787×1092 1/16
印 张 18
插 页 2
字 数 363,000
版 次 2026 年 4 月第 1 版
印 次 2026 年 4 月第 1 次印刷
ISBN 978-7-5432-3758-2/F·1680
定 价 96.00 元

Martin J. Osborne and Ariel Rubinstein,
Models in Microeconomic Theory.
Cambridge, UK: Open Book Publishers, 2020,
<https://doi.org/10.11647/OBP.0204>
and
<https://doi.org/10.11647/OBP.0211>

© 2020 Martin J. Osborne and Ariel Rubinstein
Published by permission.
Licenced under a Creative Commons
Attribution-NonCommercial-NoDerivs license (CC BY-NC-ND 4.0).
The original work can be freely accessed and downloaded from
<https://doi.org/10.11647/OBP.0204>
and
<https://doi.org/10.11647/OBP.0211>

Chinese (simplified characters only) © 2026
by Truth & Wisdom Press

本书英文原版由 Open Book Publishers 出版。
2026 年简体中文版专有出版权属格致出版社。
本作品根据知识共享(Creative Commons)的
“署名-非商业性使用-禁止演绎 4.0”(简称 CC BY-NC-ND 4.0)
国际许可协议获得许可。

上海市版权局著作权合同登记号：
09-2023-0193

当代经济学教学参考书系

微观经济理论模型/马丁·J.奥斯本等著

计量经济学:入门与核心/布鲁斯·E.汉森著

计量经济学:进阶与应用/布鲁斯·E.汉森著

计量经济学:高级与拓展/布鲁斯·E.汉森著

国际宏观经济学:现代方法/斯特凡妮·施米特-格罗埃等著

因果推断导论——统计学、生物医学与社会科学的视角/吉多·W.因本斯等著

行为法律经济学/埃亚勒·扎米尔等著

劳动和人力资源经济学——经济体制与公共政策(第三版)/陆铭等著

全球视角的宏观经济学/杰弗里·萨克斯等著

博弈论/迈克尔·马希勒等著

基本无害的计量经济学:实证研究者指南(重译本)/乔舒亚·安格里斯特等著

发展中国家的开放宏观经济学/卡洛斯·A.韦格著

经济学中有约束的最优化问题解析/彼得·B.摩根著

微观经济学(第四版)/周惠中著

经济学中的主体建模/琳恩·哈米尔等著

可计算一般均衡模型的基本原理与编程(第三版)/张欣著

金融学原理(第七版)/彭兴韵著

博弈与社会讲义(第二版)/张维迎著

微观经济学:原理和分析(第二版)/弗兰克·A.考威尔著

贸易理论与政策的数值模拟导论/约翰·吉尔伯特等著

经济增长(第二版)/罗伯特·J.巴罗等著

信息与激励经济学(第三版)/陈钊著

合作的微观经济学/何维·莫林著

不确定性与信息分析(第二版)/苏希尔·比克查恩达尼等著

博弈论教程/肯·宾默尔著

精通计量:从原因到结果的探寻之旅/乔舒亚·安格里斯特等著

开放经济的宏观经济学/马丁·乌里韦等著

宏观经济学(第四版)/查尔斯·I.琼斯著

货币经济学——理论、实践与政策(第二版)/田素华编著

博弈论与信息经济学/张维迎著

法和经济学(第六版)/罗伯特·考特等著

金融市场学/彭兴韵著

《微观经济学:现代观点》题库(第九版)/H.范里安等著

微观经济学:现代观点(第九版)/H.范里安著

《微观经济学:现代观点》练习册(第九版)/H.范里安等著

组织经济学手册/罗伯特·吉本斯等主编
策略:博弈论导论/乔尔·沃森著
合同理论/帕特里克·博尔顿等著
经济理论中的最优化方法(第二版)/阿维纳什·K.迪克西特著
公共经济学/安东尼·B.阿特金森等著
公共经济学(第二版)/吉恩·希瑞克斯等著
公共经济学习题解答手册(第二版)/尼格尔·哈希马沙德等著
金融经济学十讲(纪念版)/史树中著
宏观经济学数理模型基础(第二版)/王弟海编著
货币理论与政策(第四版)/卡尔·瓦什著
鲁宾斯坦微观经济学讲义(第二版)/阿里尔·鲁宾斯坦著
机制设计理论/提尔曼·伯格斯著
经济增长导论(第三版)/查尔斯·I.琼斯等著
劳动经济学:不完全竞争市场的视角/提托·博埃里等著
衍生证券、金融市场和风险管理/罗伯特·A.加罗等著
国际贸易理论与政策讲义/理查德·庞弗雷特著
高级微观经济学教程/戴维·克雷普斯著
金融基础:投资组合决策和证券价格/尤金·法玛著
环境与自然资源经济学(第三版)/张帆等著
集聚经济学:城市、产业区位与全球化(第二版)/藤田昌久等著
经济数学引论/迪安·科尔贝等著
博弈论:经济管理互动策略/阿维亚德·海菲兹著
新制度经济学——一个交易费用分析范式/埃里克·弗鲁博顿等著
产业组织:市场和策略/保罗·贝拉弗雷姆等著
数量金融导论:数学工具箱/罗伯特·R.雷伊塔诺著
现代宏观经济学高级教程:分析与应用/马克斯·吉尔曼著
政府采购与规制中的激励理论/让·梯若尔等著
集体选择经济学/乔·B.史蒂文斯著
市场、博弈和策略行为/查尔斯·A.霍尔特著
公共政策导论/查尔斯·韦兰著
宏观经济学:现代原理/泰勒·考恩等著
微观经济学:现代原理/泰勒·考恩等著
微观经济理论与应用:数理分析(第二版)/杰弗里·M.佩洛夫著
国际经济学(第七版)/西奥·S.艾彻等著
新动态财政学/纳拉亚纳·R.科彻拉科塔著
《微观经济学》学习指南(第三版)/周惠中著
《宏观经济学》学习指南/大卫·吉立特著

宏观经济理论/让-帕斯卡·贝纳西著

国际经济学(第五版)/詹姆斯·吉尔伯著

计量经济学(第三版)/詹姆斯·H.斯托克等著

应用微观经济学读本/克莱格·M.纽马克编

理性的边界/赫伯特·金迪斯著

经济社会的起源(第十三版)/罗伯特·L.海尔布罗纳著

政治博弈论/诺兰·麦卡蒂等著

发展经济学/斯图亚特·R.林恩著

宏观经济学:现代观点/罗伯特·J.巴罗著

高级微观经济学/黄有光等著

货币、银行与经济(第六版)/托马斯·梅耶等著

全球市场中的企业与政府(第六版)/默里·L.韦登鲍姆著

